

Elektromagnetiska fält, vågledare och antenner

Del 2: Vågledare och Antenner

Anders

2 oktober 2022 (15:26)

Sammanfattning

Häri beskrivs principerna för vågledare och antenner. Några specialfall diskuteras.

Innehåll

Innehåll	ii
0 Inledning	0
1 Allmänna matematiska förenklingar för fix propagationsriktning	1
1.0 Förenklingar i isotropa material	1
1.1 Uppdelning av vågrörelse	2
2 Metalliska vågledare	5
2.0 Randvillkor	5
2.1 TM-, TE- och TEM-moder	6
2.1.0 TM-moder	7
2.1.1 TE-moder	8
2.1.2 Gränsfrekvenser	8
2.1.3 TEM-moder	9
2.1.4 Återblick TE-, TM- och TEM-moder	10
2.2 Ortogonalitet	11
2.2.0 Energilagring och effekttransport i vågledare	12
2.3 Särskild geometri: Rektangulära vågledare	13
2.3.0 Degeneration i rektangulär vågledare	14
2.4 Särskild geometri: Cirkulära vågledare	15
2.5 Icke propagerande moder	16
2.6 Bestämning av modkoefficienter vid inkoppling av signal i vågledare	17
2.7 Modanpassning	17
2.7.0 Reaktiva element i vågledare, bländare	17
2.8 Dämpning i vågledare	18
2.8.0 Dämpning i väggarna, impedansvillkor och ytimpedans	18
2.8.1 Fälteffekter i en god ledare, typ metall	18
3 Hålrumsresonatorer	23
3.0 Icke perfekt ledande hålrumsresonator	24
3.1 Godhetstal, Q	24
4 Dielektriska vågledare och optiska fibrer	26
4.0 Plan vågledare	26
4.0.0 TE-moder	27
4.0.1 TM-moder	28
4.1 Cirkulär dielektrisk vågledare – optisk fiber	29
4.1.0 TM-moder och TE-moder	31
4.1.1 HE- och EH-moder	32
5 Vågledare på kretskort – planära överföringslinor	33
5.0 Stripline	33
5.1 Microstrip	34
5.2 Koplanära vågledare	35
5.3 Slotline	35
5.4 Substratintegrerad vågledare	36

5.5	Finline	36
5.6	Övergångar i planära överföringslinor	37
6	Utstrålning från lokala oscillerande system av laddningar och strömmar	38
6.0	Fält från lokal oscillerande källa	38
6.0.0	Närfältet	39
6.0.1	Fjärrfältet	39
6.0.2	Mellanfältet	40
6.1	Elektriska dipolfält och utstrålning	40
6.1.0	Mittmatad linjär antenn, dipolantenn	42
6.2	Elektriska kvadrupolfält och magnetiska dipoler	43
6.2.0	Åter: mittmatad linjär antenn	46
7	Allmänt om antenner	48
7.0	Antenntyper	48
7.0.0	Ledarantenner	48
7.0.1	Hornantenner	48
7.0.2	Kretskortsantenner	48
7.0.3	Läckageantenner	49
7.0.4	Reflektorantenner	49
7.0.5	Linsantenner	49
7.1	Antennfält	49
8	Antennparametrar	50
A	Notation och definitioner	51
B	Förkunskaper	52
B.0	Naturfilosofi	52
B.1	Matematik	52
C	Vidare läsning	53
	Referenser	54

0 Inledning

Denna artikel tjänar som en uppföljning av [Fur22a] och en förberedelse inför [Fur22b].

I många sammanhang, inte minst då vi vill förmedla information, är det meningsfullt att betrakta *vågledare*. Dessa är strukturer som leder elektromagnetiska fält, så att deras förluster längs eller i strukturen inte lider av förluster på samma sätt som om fältet hade spritts över hela rummet. Inom mikrovågsområdet och optiken är tillämpningen av vågledare utbredd.

Antenner är en annan struktur som har stora tillämpningar för informationsförmedling. De tillåter oss att utstråla fält av given frekvens i olika geometrier.

1 Allmänna matematiska förenklingar för fix propagationsriktning

För att förenkla studier av vågledare avsevärt fixerar vi en propagationsriktning för vågrörelsen i vågledaren. Vi väljer, så som traditionen bjuder, att vågorna propagerar i z -riktningen. Då delar vi upp ett vektorfält med rumsliga komponenter enligt

$$(0) \quad V = V_T + V_z$$

Där den första termen är den transversella delen, som alltså pekar i xy -planet, och den andra termen beskriver z -komponenten. Vi kan då notera de algebraiska relationerna:

$$(1) \quad n_z \times V = n_z \times V_T$$

$$(2) \quad n_z \times (n_z \times V_T) = -V_T$$

Vi delar även upp den rumsliga differentialoperatorn:

$$(3) \quad \nabla = \nabla_T + \partial_z$$

Och på samma sätt har vi:

$$(4) \quad n_z \times \nabla = n_z \times \nabla_T$$

$$(5) \quad n_z \times (n_z \times \nabla_T) = -\nabla_T$$

Laplaceoperatorn blir då:

$$(6) \quad \Delta = \nabla_T^2 + \partial_z^2$$

1.0 Förenklingar i isotropa material

Vi stoppar in våra förenklingar i Maxwells ekvationer för en region utan källtermer och får Faradays och Ampères lagar:

$$(7) \quad \nabla \times E = -i\omega\mu H, \quad \nabla \times H = i\omega\epsilon E$$

Då får vi för våra transversella och longitudinella komponenter:

$$(8) \quad n_z \times (\nabla \times E) = -i\omega\mu n_z \times H, \quad n_z \times (\nabla \times H) = i\omega\epsilon n_z \times E$$

$$(9) \quad n_z \cdot (\nabla \times E) = -i\omega\mu H_z, \quad n_z \cdot (\nabla \times H) = i\omega\epsilon E_z$$

Skriver vi nu detta på vår nya form får vi

$$(10) \quad \nabla_T E_z - \partial_z E_T = -i\omega\mu n_z \times H_T, \quad \nabla_T H_z - \partial_z H_T = i\omega\epsilon n_z \times E_T$$

$$(11) \quad \nabla_T \cdot (n_z \times E_T) = i\omega\mu H_z, \quad \nabla_T \cdot (n_z \times H_T) = -i\omega\epsilon E_z$$

I homogena material, alltså ϵ , μ konstanta, gäller att E och H är divergensfria, som på vår form kan skrivas som:

$$(12) \quad \nabla_T \cdot E_T + \partial_z E_z = 0, \quad \nabla_T \cdot H_T + \partial_z H_z = 0$$

1.1 Uppdelning av vågrörelse

På samma sätt som tidigare kan vi också skriva upp en helmholtzekvation på formen:

$$(13) \quad (\Delta + k^2)E(r) = 0, \quad (\Delta + k^2)B(r) = 0$$

Med $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ vågtalet för den givna frekvensen som även kommer bero på egenskaperna hos materialet. Vi vill nu betrakta lösningar som separerade i transversell och longitudinell riktning längs propagationen. Vi delar på Ortsvektorn:

$$(14) \quad r = \rho + z$$

Där ρ beskriver den transversella delen och z den longitudinella. Vi söker alltså lösningar som är separerade i dessa variabler och gör ansatsen:

$$(15) \quad E(r) = E(\rho)f(z), \quad H(r) = H(\rho)f(z)$$

Här uppmärksammas läsaren på att olika funktioner givits samma namn men argumentet kommer undanröja tveksamheter i vilken funktion som åsyftas. Nu kan vanlig variabelseparation tillämpas (se exempelvis [Fol09] om du som läsare känner dig obekvämd med variabelseparationsmetoder). Eftersom förfarandet är exakt likadant för E och H så skriver vi allmänt $u(r) = u(\rho)f(z)$ och löser den:

$$(16) \quad \frac{\partial_T^2 u(\rho)}{u(\rho)} + \frac{\partial_z^2 f(z)}{f(z)} + k^2 = 0$$

Vi börjar med f och skriver om enligt:

$$(17) \quad \frac{\partial_z^2 f(z)}{f(z)} = -h^2$$

Och löser i vanlig ordning. Lösningarna blir på formen:

$$(18) \quad f(z) = e^{\pm ihz}$$

Där konventionen är att positiv exponent svarar mot vågor som rör sig i negativ z -riktning och tvärt om för negativ exponent. Nu fortsätter vi med den transversella delen och får:

$$(19) \quad \nabla_T^2 u(\rho) + (k^2 - h^2)u(\rho) = 0$$

Låter vi nu $k^2 - h^2 = q^2$ får vi att $u(\rho)$ uppfyller en ny helmholtzekvation i transversalplanet enligt:

$$(20) \quad (\nabla_T^2 + q^2)u(\rho) = 0$$

Vi har nu tre helmholtzekvationer och tre tillhörande vågtal:

0. k : Vågtalet i materialet, det *fullständiga vågtalet*
1. h : Vågtalet för $f(z)$, det *longitudinella vågtalet*
2. q : Vågtalet för $u(\rho)$, det *transversella vågtalet*

Dessa tre uppfyller villkoret:

$$(21) \quad k^2 = q^2 + h^2$$

Nu när vi har separerat lösningarna till helmholtzekvation har vi att vi kan göra ersättningen $\partial_z \rightarrow -ih$. Manipulerar vi våra maxwellekvationer så kan vi nu skriva de transversella komponenterna av E och H i termer av de longitudinella enligt;

$$(22) \quad E_T = \frac{-i}{q^2} [h \nabla_T E_z - k \eta n_z \times \nabla_T H_z]$$

$$(23) \quad H_T = \frac{-i}{q^2} [h \nabla_T H_z + \frac{k}{\eta} n_z \times \nabla_T E_z]$$

Där vi infört faktorn $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ som bestäms av materialets egenskaper. η kallas för *vågimpedansen*. Vi bör här notera att om vi känner till de longitudinella fälten så kan de totala fälten beräknas från dem tack vare ekvationerna ovan.

Vi avslutar med att sätta in dessa uttryck för de transversella komponenterna i våra maxwellekvationer (ekvationer 10 och 11) får vi:

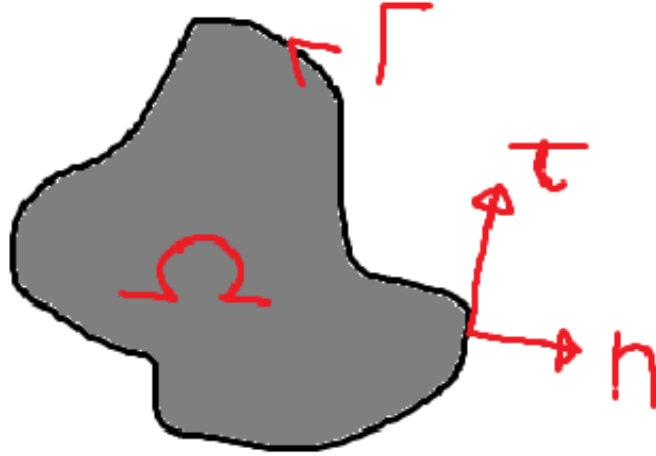
$$(24) \quad -\frac{i}{q^2} [h \nabla_T \cdot (n_z \times \nabla_T E_z) + k \eta \nabla_T^2 H_z] = j k \eta H_z$$

$$(25) \quad -\frac{i}{q^2} [h \nabla_T \cdot (n_z \times \nabla_T H_z) - \frac{k}{\eta} \nabla_T^2 E_z] = -j \frac{k}{\eta} E_z$$

Vi noterar att den första termen inom varje av hakparenteserna i uttrycken försvinner ($\nabla_T \cdot (n_z \times \nabla_T u) = -n_z \cdot (\nabla_T \times \nabla_T u) = 0$). Därför får vi att de longitudinella komponenterna båda var för sig uppfyller helmholtzekvationer:

$$(26) \quad (\nabla_T^2 + q^2)u = 0$$

Denna matematiska inledning syftade till att förbereda notationen för kommande diskussion av vågledare.



Figur 0: Notation för geometrin för en metallisk vågledare. Ω är inandömet, $\Gamma = \partial\Omega$ är dess rand, n är en utåtriktad normal och τ är en tangentiell normalriktning. Notera att positiv z -riktning är ut ur papperet.

2 Metalliska vågledare

Här börjar en mer praktisk diskussion om vågledare som inleds med ett viktigt fall. Den första typen av vågledare som beaktas är den *slutna hålrumsvågledaren*, som består av en hålighet innesluten i ett ledande material. Vi kan tänka oss ett rör vars syfte är att leda en EM-våg från en plats till en annan.

Vågledarens inre kallar vi för Ω , och inrytan, som kallas *mantelytan*, betecknar vi Γ . Ytnormalen, n (notera att uttryck så som n_z inte har något med denna enhetsvektor att göra utan beskriver enhetsvektorn som pekar i riktningen som ökar värdet av koordinaten z), är riktad ut från vågledaren, alltså in i den omgivande ledaren snarare än in i håligheten. Vi inför också en tangentenhetsvektor, τ , sådan att den alltid pekar vinkelrätt mot både n och n_z , och följer mantelytans kontur, som vi kallar Γ , i positiv riktning för varje z -plan med avseende på n_z . Se figur 0 för schematisk bild.

2.0 Randvillkor

Nu när vi beskrivit geometrin för vågledaren kan vi betrakta randvillkoren i gränsen som utgörs av Γ . För en perfekt ledande yta gäller som bekant:

$$(27) \quad n \times E = 0, \quad n \cdot B = 0$$

Med vår uppdelning och det konstitutiva sambandet, $B = \mu H$ ger oss villkoren

vid Γ enligt:

$$(28) \quad n \times E = n \times E_T + n \times n_z E_Z$$

Här noterar vi att $n \times n_z = \tau$ så vi får ekvationen

$$(29) \quad n \times E_T = \tau E_Z$$

Den andra ekvationen ger:

$$(30) \quad n \cdot H = n \cdot (H_T + n_z H_z) = n \cdot H_T = 0$$

Vi noterar nu att i ekvation 29 ligger både n och E_T helt i det transversella planet, så deras kryssprodukt ligger helt i riktningen n_z . Eftersom högerledet helt ligger i det transversella planet kommer lösningen av ekvationen ge de två villkoren som alltid måste gälla vid gränssytan Γ :

$$(31) \quad E_z = 0, \quad n \times E_T = 0$$

På ett liknande sätt kan motsvarande villkor fås för H :

$$(32) \quad n \cdot \nabla_T H_z = 0$$

Vad säger dessa randvillkor? Till och börja med får E inte ha någon komponent i z -riktningen. Vidare måste den transversella delen, E_T , vara riktad helt utåt, i n -riktningen. Slutligen har vi ett villkor att riktningsderivatan av H_z utåt, alltså i n -riktningen, måste vara noll.

2.1 TM-, TE- och TEM-moder

Låt oss nu fundera på EM-vågor som färdas längs vågledare. Om materialet inuti vågledaren är isotropt så kan vi använda våra kunskaper från vågteorin. Vi antar alltså ett z -beroende för fälten enligt e^{-ihz} . Eftersom endast de transversella beroendena är okända nu kan vi analysera teorin i planet som utgörs av ledarens tvärsnitt.

Vi har alltså med helmholtzekvationerna och randvärdesekvationerna för $E_z(\rho)$:

$$(33) \quad \begin{aligned} (\nabla_T^2 + q^2)E_z(\rho) &= 0, & \rho \in \Omega \\ E_z(\rho) &= 0. & \rho \in \Gamma \end{aligned}$$

Alltså ett egenvärdesproblem i ett begränsat tvådimensionellt område med dirichletvillkor. På samma sätt har vi för $H_z(\rho)$:

$$(34) \quad \begin{aligned} (\nabla_T^2 + q^2)H_z(\rho) &= 0, & \rho \in \Omega \\ n \cdot \nabla_T H_z(\rho) &= 0. & \rho \in \Gamma \end{aligned}$$

Vilket är ett egenvärdesproblem i ett begränsat tvådimensionellt område med neumannvillkor. Lösningarna till dessa två ekvationssystem finns bara för diskreta egenvärden och är uppsättningar av ortogonala egenfunktioner. Eftersom operatoren är hermitesk så är egenvärdena positiva och helt reella. När de longitudinella fälten bestämts kan de transversella fås ur dem enligt ekvation 23 och det longitudinella vågtalet kan bestämmas från ekvation 21. Den totala uppsättningen av fält som motsvarar ett egenvärde kallas egenvärdets *vågledarmod*.

Eftersom egenvärdesekvationerna är oberoende har vi två oberoende lösningsmängder. Vi kallar dessa för *transversella magnetiska moder*, *TM*, sådana att $H_z = 0$, respektive *transversella elektriska moder*, *TE*, sådana att $E_z = 0$.

2.1.0 TM-moder

Vi har alltså $H_z = 0$. E_z och q^2 bestäms av egenvärdesproblemet ekvation 33. Ifrån detta kan vi använda ekvation 23 för att erhålla de transversella fälten:

$$(35) \quad E_T = \frac{-ih}{q^2} \nabla_T E_z$$

$$(36) \quad H_T = \frac{-ik}{q^2 \eta} n_z \times \nabla_T E_z$$

Dessa kan relateras enligt

$$(37) \quad E_T = -Z^{\text{TM}} n_z \times H_T$$

$$(38) \quad H_T = Y^{\text{TM}} n_z \times E_T$$

Där Z^{TM} kallas för den *karaktäristiska impedansen*, och dess invers, $Y^{\text{TM}} = 1/Z^{\text{TM}}$ kallas för den *karaktäristiska admittansen*. De ges av

$$(39) \quad Z^{\text{TM}} = \eta \frac{h}{k}$$

2.1.1 TE-moder

För TE-moder är förfarandet i princip identiskt. Vi har alltså $E_z = 0$. H_z och q^2 bestäms av egenvärdesproblemet ekvation 33. Ifrån detta kan vi använda ekvation 23 för att erhålla de transversella fälten:

$$(40) \quad E_T = \frac{ik\eta}{q^2} n_z \times \nabla_T H_z$$

$$(41) \quad H_T = \frac{-ih}{q^2} \nabla_T H_z$$

Dessa kan relateras enligt

$$(42) \quad E_T = -Z^{\text{TE}} n_z \times H_T$$

$$(43) \quad H_T = Y^{\text{TE}} n_z \times E_T$$

Där Z^{TE} är *karaktäristiska impedansen*, och $Y^{\text{TE}} = 1/Z^{\text{TE}}$ den *karaktäristiska admittansen*. De ges av

$$(44) \quad Z^{\text{TE}} = \eta \frac{k}{h}$$

2.1.2 Gränsfrekvenser

Från ekvation 21 har vi att det longitudinella vågtalet, h , ges av:

$$(45) \quad h = \sqrt{k^2 - q^2}$$

Det transversella vågtalet, q , är reellt (minns hermitesk operator), medan det totala vågtalet, k , beror av frekvensen, ω och materialparametrar, så det kan vara komplext. Därför kan det longitudinella vågtalet, h , vara komplext.

Om vi tänker oss att materialen i vågledaren inte tillför energi (aktiva material) så bör imaginärdelen enligt våra konventioner vara icke-positiv, sådan att den ger en exponentiellt avtagande och därmed dämpande effekt. Realdelen måste fortfarande vara icke-negativ för att vågen skall propagera så som vi antagit. Är materialen förlustfria blir imaginärdelen givetvis noll, och vågen propagerar odämpad.

För förlustfria material blir uppdelningen ganska simpel. Det longitudinella vågtalet är då alltså:

$$(46) \quad h = \sqrt{k^2 - q^2}, \quad k > q$$

$$(47) \quad h = -i\sqrt{k^2 - q^2}, \quad k \leq q$$

Vilket ger $e^{-ihz} = e^{-i|h|z}$ och $e^{-ihz} = e^{-|h|z}$, vilka representerar vågutbredning i z -led respektive ett fält som exponentiellt avtar i z -led.

Låter vi k vara givet så inser vi att det bara finns ett visst antal egenvärden, q^2 sådana att $q < k$. Det är alltså endast dessa som kan propagera i vågledaren.

För en given förlustfri mod finns alltså en frekvens för vilken moden går från att vara avtagande till att bli propagerande, och den fås alltså då $k = q$ vilket, med $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$, ger:

$$(48) \quad \begin{aligned} \omega_g &= \frac{q}{\sqrt{\epsilon\mu}} \\ &= qv \end{aligned}$$

Där v kallas för *fashastigheten*. Vi har alltså för en given mod att $\omega > \omega_g$ innebär att vågen kan propagera medan $\omega < \omega_g$ innebär att vågen kommer att avta exponentiellt.

2.1.3 TEM-moder

En naturlig fråga vi kan ställa oss nu är vad som händer om vi har $E_z = H_z = 0$. Till att börja med kan vi inse att hela vågtalet ligger utanför det transversella planet. Vi får från ekvation 23 de transversella fälten enligt:

$$(49) \quad \partial_z E_T = i\omega\mu n_z \times H_T$$

$$(50) \quad \partial_z H_T = -i\omega\epsilon n_z \times E_T$$

Deriverar vi med avseende på z -koordinaten igen så får vi

$$(51) \quad (\partial_z^2 + k^2)E_T = 0$$

En lösning som propagerar i z -led kan alltså skrivas som

$$(52) \quad E_T(r) = E_T(\rho)e^{-ikz}$$

Sambanden mellan E_T och H_T blir alltså

$$(53) \quad E_T = -\eta n_z \times H_T$$

$$(54) \quad H_T = \frac{1}{\eta} n_z \times E_T$$

Eftersom vågtalet ligger helt längs den longitudinella riktningen har vi $k = h$ och $q = 0$, vilket betyder att det inte finns någon gränshfrekvens utan vågor av alla frekvenser kan för varje TEM-mod propagera.

TEM-moder kan inte uppstå i alla geometrier. Vidare omskrivningar av ekvationerna för en TEM-mod ger oss

$$(55) \quad E_T(\rho) = -\nabla_T \Phi(\rho)$$

För någon skalärpotential Φ . Vidare skall denna uppfylla

$$(56) \quad \nabla_T^2 \Phi(\rho) = 0$$

Med våra randvillkor får vi alltså en laplaceekvation som bara har en triviell lösning, $E_T = 0$, för vårt randvillkor med konstant potential vilket såklart innebär att $H_T = 0$. Alla fält är alltså noll och det är inte särskilt intressant att studera ett fenomen som aldrig kan uppstå.

Det visar sig att om vi förändrar vår geometri en smula, så att Γ inte längre är sammanhängande utan består av flera kroppar som kan ha olika potentialer jämfört med varandra, kommer vi ha nollskilda TEM-moder. Ett viktigt exempel är koaxialkabeln, i vilken randen, Γ , består av två koncentriska cylindrar (två koncentriska cirklar i tvärsnittet för konstant z -koordinat). I allmänhet gäller att för N icke sammanhängande kroppar som utgör Γ fås $N - 1$ linjärt oberoende TEM-moder.

2.1.4 Återblick TE-, TM- och TEM-moder

Låt oss nu summera våra moder och fundera på vad vi har kommit fram till.

I en källfri vågledare kan ett godtyckligt EM-fält skrivas som en summa av våra tre olika modtyper. Antalet TEM-moder är begränsat av randvillkoren men antalet TE- och TM-moder är obegränsat.

Om vi vill beskriva ett allmänt fält av dessa moder så får vi summera dem, multiplicerade med var sin koefficient, a_n . Vi har för fält som propagerar eller avtar i z -riktning enligt

$$(57) \quad E^+(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ [E_{Tn}(\rho) + E_{zn}(\rho)n_z] e^{-ih_n z}$$

$$(58) \quad H^+(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ [H_{Tn}(\rho) + H_{zn}(\rho)n_z] e^{-ih_n z}$$

Där vi summerar över alla moderna. Vi måste dock ta hänsyn till fält som propagerar och avtar åt andra hållet, alltså i negativ z -led. Dessa fås på motsvarande sätt, fast vi låter den longitudinella komponenten av vågtalet vara negativ, $h \rightarrow -h$.

$$(59) \quad E^-(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- [E_{Tn}(\rho) - E_{zn}(\rho)n_z] e^{+ih_n z}$$

$$(60) \quad H^-(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- [-H_{Tn}(\rho) + H_{zn}(\rho)n_z] e^{+ih_n z}$$

Med de totala fälten

$$(61) \quad E(r) = E^-(r) + E^+(r)$$

$$(62) \quad H(r) = H^-(r) + H^+(r)$$

Vi bör här fråga oss om detta är något slags bas för lösningsmängden som vi har arbetat fram och det visar sig att det är det.

2.2 Ortogonalitet

Eftersom operatoren för vilken vi löste egenvärdesekvationerna var hermitesk vet vi att egenvärdena, q^2 , är reella, vilket alltså leder till reella egenfunktioner, E_z och H_z .

Vi undersöker huruvida två distinkta moder är ortogonella. Tag två egenvärden, $q_n^2 \neq q_m^2$ och integrera z -komponenten över hela tvärsnittsytan, Ω .

$$(63) \quad \begin{aligned} (q_m^2 - q_n^2) \int_{\Omega} d^2x E_{zm} E_{zn} &= \int_{\Omega} d^2x [E_{zm} \nabla_T^2 E_{zn} - E_{zn} \nabla_T^2 E_{zm}] \\ &= \int_{\Omega} d^2x \nabla_T \cdot [E_{zm} \nabla_T E_{zn} - E_{zn} \nabla_T E_{zm}] \\ &= \int_{\Gamma} dl [E_{zm} n \cdot \nabla_T E_{zn} - E_{zn} n \cdot \nabla_T E_{zm}] \end{aligned}$$

Där vi använt Greens identiteter. Exakt likaledes fås motsvarande relationer för H . I allmänhet har vi

$$(64) \quad \int_{\Omega} d^2x E_{zm} E_{zn} = 0, \quad q_m \neq q_n$$

$$(65) \quad \int_{\Omega} d^2x H_{zm} H_{zn} = 0, \quad q_m \neq q_n$$

Moderna är alltså ortogonala. Vidare kan vi, enbart för enkelhetens skull, normera dem på så sätt att $\langle E_{zm}, E_{zn} \rangle = \delta_{mn}$, och på samma sätt $\langle H_{zm}, H_{zn} \rangle = \frac{1}{|\eta|^2} \delta_{mn}$. Med dessa samband kan vi enklare uttrycka energilagring och effekttransport i vågledaren.

2.2.0 Energilagring och effekttransport i vågledare

Utan att för djupt matematiskt gräva ned oss (härledningar finns i exempelvis [Jac62] eller [Nor] för den nyfikne) fås att den lagrade energin i E-fälten är

$$(66) \quad \int_{\Omega} d^2x E_{Tm}^{\text{TM}} \cdot \overline{(E_{Tn}^{\text{TM}})} = \frac{|h_m|^2}{q_m^2} \delta_{mn}$$

$$(67) \quad \int_{\Omega} d^2x E_{Tm}^{\text{TE}} \cdot \overline{(E_{Tn}^{\text{TE}})} = \frac{|k|^2}{q_m^2} \delta_{mn}$$

$$(68) \quad \int_{\Omega} d^2x E_{Tm}^{\text{TEM}} \cdot \overline{(E_{Tn}^{\text{TEM}})} = \delta_{mn}$$

$$(69) \quad \int_{\Omega} d^2x E_{Tm}^{\text{TE}} \cdot \overline{(E_{Tn}^{\text{TM}})} = 0$$

$$(70) \quad \int_{\Omega} d^2x E_{Tm}^{\text{TEM}} \cdot \overline{(E_{Tn}^{\text{TM}})} = 0$$

$$(71) \quad \int_{\Omega} d^2x E_{Tm}^{\text{TEM}} \cdot \overline{(E_{Tn}^{\text{TE}})} = 0$$

Ifrån admittanssambanden, exempelvis ekvation 43, kan liknande relationer fås för energin i H-fälten

$$(72) \quad \int_{\Omega} d^2x H_{T_m}^{\text{TM}} \cdot \overline{(H_{T_n}^{\text{TM}})} = \frac{|k|^2}{q_m^2 |\eta|^2} \delta_{mn}$$

$$(73) \quad \int_{\Omega} d^2x H_{T_m}^{\text{TE}} \cdot \overline{(H_{T_n}^{\text{TE}})} = \frac{|h_m|^2}{q_m^2 |\eta|^2} \delta_{mn}$$

$$(74) \quad \int_{\Omega} d^2x H_{T_m}^{\text{TEM}} \cdot \overline{(H_{T_n}^{\text{TEM}})} = \frac{1}{|\eta|^2} \delta_{mn}$$

Slutligen kan vi skriva upp effekttransporten i vågledaren som

$$(75) \quad \int_{\Omega} d^2x E_{T_m}^{\text{TM}} \cdot \overline{(H_{T_n}^{\text{TM}})} = \frac{\bar{k} h_m}{q_m^2 \bar{\eta}} \delta_{mn}$$

$$(76) \quad \int_{\Omega} d^2x E_{T_m}^{\text{TE}} \cdot \overline{(H_{T_n}^{\text{TE}})} = \frac{\bar{h}_m k}{q_m^2 \bar{\eta}} \delta_{mn}$$

$$(77) \quad \int_{\Omega} d^2x E_{T_m}^{\text{TEM}} \cdot \overline{(H_{T_n}^{\text{TEM}})} = \frac{1}{\bar{\eta}} \delta_{mn}$$

2.3 Särskild geometri: Rektangulära vågledare

Nu ska vi studera specifika geometrier. Låt oss tänka oss en rektangulär vågledare sådan att ett tvärsnitt med konstant z -koordinat och rotera den så att den har ett par sidor längs x -riktningen med längd a och ett par längs y -riktningen med längd b (se figur 1).

Det finns uppenbarligen inga TEM-moderna eftersom randen är en sammanhängande rektangel. Vi går i stället till TM-moderna och löser egenvärdesekvationen med randvillkor enligt

$$(78) \quad (\partial_x^2 + \partial_y^2 + q^2) E_z(x, y) = 0$$

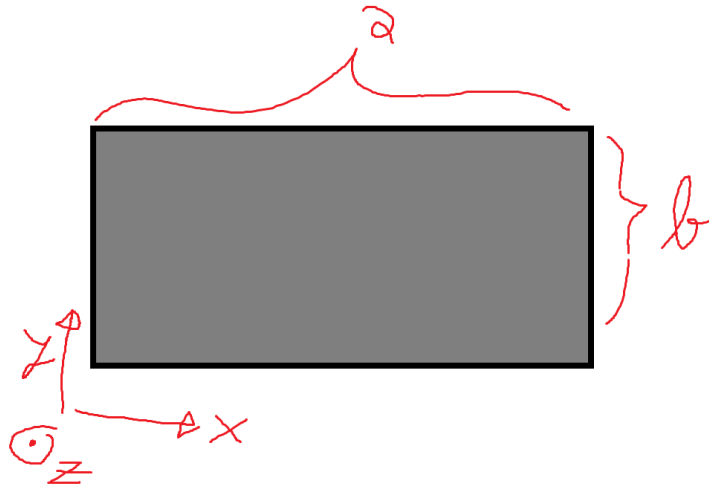
$$(79) \quad E_z(0, y) = E_z(a, y) = 0$$

$$(80) \quad E_z(x, 0) = E_z(x, b) = 0$$

Detta löses med variabelseparationsmetoder (se exempelvis [Fol09]). Egenvärden och egenfunktioner fås enligt

$$(81) \quad q_{mn}^{\text{TM}} = \sqrt{\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}}$$

$$(82) \quad E_{zmn}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$



Figur 1: Notation för rektangulär vågledare med sidorna a och b .

För TE-moder får vi en liknande ekvation men med neumannvillkor i stället för dirichletvillkor.

$$(83) \quad (\partial_x^2 + \partial_y^2 + q^2)H_z(x, y) = 0$$

$$(84) \quad \partial_x H_z(0, y) = \partial_x H_z(a, y) = 0$$

$$(85) \quad \partial_y H_z(x, 0) = \partial_y H_z(x, b) = 0$$

På samma sätt som tidigare kan vi separera variabler och få

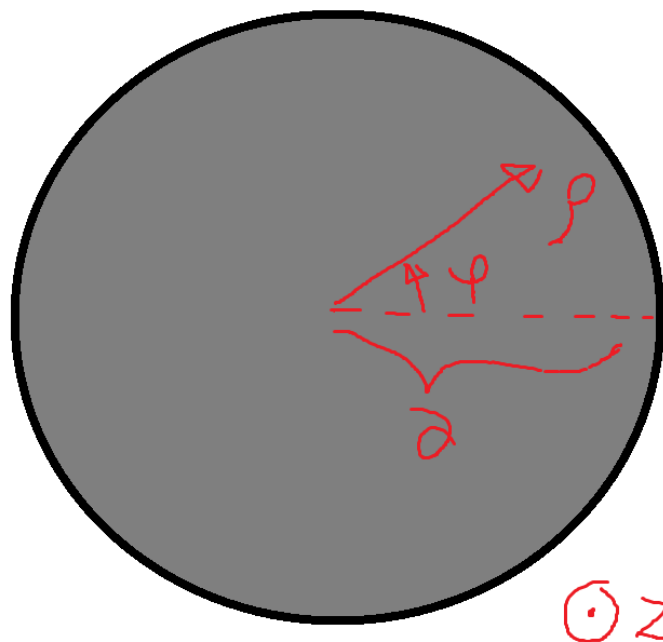
$$(86) \quad q_{mn}^{\text{TE}} = \sqrt{\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}}$$

$$(87) \quad H_{zmn}(x, y) = \frac{\sqrt{(2 - \delta_{n0})(2 - \delta_{m0})}}{|\eta| \sqrt{ab}} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}$$

Vi bör här notera att egenvärdena blir desamma. I TM-fallet kan varken m eller n vara 0, men i TE-fallet kan en av dem vara det men inte båda för då hade egenvärdet varit 0. Hade någon varit det i TM-fallet hade vi haft en TEM-mod vilket vi inte kan i denna geometri.

2.3.0 Degeneration i rektangulär vågledare

Eftersom TE- och TM-moder delar egenvärde är de degenererade och i allmänhet hör två egenfunktioner till varje egenvärde. Ökar vi symmetrin ytterligare så att $a = b$, dvs kvadratisk tvärsnitt, så är degenerationen i allmänhet fyrfaldig i stället.



Figur 2: Notation för cirkulär vågledare med radie a .

2.4 Särskild geometri: Cirkulära vågledare

En annan särskild geometri är den med cirkulärt tvärsnitt med radie a . Till att börja med är randen sammanhängande så TEM-moder finns inte. Vi går till polära koordinater, (ρ, ϕ) (se figur 2). I TM-fallet får vi helmholtzekvationen och randvillkoret

$$(88) \quad \left(\frac{1}{\rho} \partial_\rho \rho \partial_\rho + \frac{1}{\rho^2} \partial_\phi^2 + q^2 \right) E_z(\rho, \phi) = 0$$

$$(89) \quad E_z(a, \phi) = 0$$

Låt oss separera $E_z = P(\rho)\Phi(\phi)$. Då får vi

$$(90) \quad \frac{\rho}{P} \partial_\rho (\rho \partial_\rho P) + q^2 \rho^2 = -\frac{1}{\Phi} \partial_\phi^2 \Phi$$

$$(91) \quad = n^2$$

Vi löser i vanlig ordning och börjar med Φ som ger ett periodiskt egenvärdesproblem

$$(92) \quad \partial_\phi^2 \Phi + n^2 \Phi = 0$$

$$(93) \quad \Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$$

som löses av $\cos(n\phi)$ och $\sin(n\phi)$ med n icke negativa heltal. Sedan får vi

$$(94) \quad \rho^2 \partial_\rho^2 P + \rho \partial_\rho P + (q^2 \rho^2 - n^2) P = 0$$

$$(95) \quad P(a) = 0$$

Vi känner igen lösningarna till denna som Bessels funktioner av första och andra slaget. Emellertid försvinner de av andra slaget eftersom de inte är begränsade i $\rho = 0$. Således får vi lösningarna $J_n(q\rho)$, med randvillkoret $J_n(qa) = 0$. I sin helhet får vi egenvärdena och egenfunktionerna:

$$(96) \quad q_{mn}^{\text{TM}} = \frac{\xi_{mn}}{a}$$

$$(97) \quad E_{zmn}(\rho, \phi) = E_{0nm} \cos(n\phi) J_n \left(\xi_{mn} \frac{\rho}{a} \right)$$

$$(98) \quad E_{zmn}(\rho, \phi) = E_{0nm} \sin(n\phi) J_n \left(\xi_{mn} \frac{\rho}{a} \right)$$

Där ξ_{mn} betecknar *mte* nollstället till J_n .

För TE-fallet får vi exakt samma situation förutom randvillkoret för den radiella delen, där vi i stället för att den ska vara noll på randen kräver dess derivata att vara noll. Vi kräver alltså $\partial_\rho J_n(q\rho) = 0$ vid $\rho = a$. Detta ger samma resultat förutom att egenvärdena representerar nollställena till besselfunktionernas derivator i stället. Vi inför ζ_{mn} som det *mte* nollstället till J'_n , och får

$$(99) \quad q_{mn}^{\text{TM}} = \frac{\zeta_{mn}}{a}$$

$$(100) \quad E_{zmn}(\rho, \phi) = H_{0nm} \cos(n\phi) J_n \left(\zeta_{mn} \frac{\rho}{a} \right)$$

$$(101) \quad E_{zmn}(\rho, \phi) = H_{0nm} \sin(n\phi) J_n \left(\zeta_{mn} \frac{\rho}{a} \right)$$

2.5 Icke propagerande moder

De icke propagerande moderna finns endast i närheten av matningspunkter eller vid diskontinuiteter eftersom de dör av exponentiellt med avstånd. Icke-propagerande TM-moder bär elektrisk fältenergi och får alltså en kapacitiv karaktär, medan TE-moder bär mest magnetisk och får alltså en induktiv karaktär..

2.6 Bestämning av modkoefficienter vid inkoppling av signal i vågledare

Av Lorentz reciprocitetssats får vi ett förhållande mellan strömtäthet och fälten. Därifrån kan koefficienterna för de olika moderna fås. I allmänhet är det svårt att känna en strömtäthet så man får göra approximationer och gissa sig fram.

2.7 Modanpassning

För att analysera diskontinuiteter i vågledare kan *modanpassning* användas. Vid en diskontinuitet kopplas fältet som består av en linjärkombination av de olika moderna och det resulterande fältet blir en annan linjärkombination av de så kallade *spridda* moderna. Förhållandet mellan infallande och spridda moder beskrivs med en *spridningsoperator*. Metoden passar väl till enklare geometrier som har analytisk lösning och spridning sådan att anpassningen kan göras analytiskt.

2.7.0 Reaktiva element i vågledare, bländare

Ett *reaktivt element* kan användas för att anpassa impedansen. Dessa kan realiseras med tunna metallplåtar, *bländare*, som har öppningar enligt en specifik geometri. Räknar vi på randvillkoren för fälten vid metallytorna när grundmoden faller in mot bländaren så exciteras de övriga moderna mer eller mindre. Om endast grundmoden kan propagera så fås en reflekterad grundmod, en transmitterad grundmod och ett antal högre ordningens moder som inte propagerar utan dör av exponentiellt i rummet. De högre moderna påverkar alltså bara fältet lokalt. Beroende på bländarens utformning så kommer de högre moderna lagra mer elektrisk energi eller magnetisk energi vilket ger komponenten en mer kapacitiv respektive induktiv karaktär.

En explicit beräkning av spridningsoperatorerna är inte särskilt jobbig, men aningen för invecklad för att göras här. I korthet kan beräkningen beskrivas som att man tar hänsyn till de nya randvillkoren och unyttjar orthogonaliteten hos fälten för att uppteckna ett förhållande mellan de olika riktade moderna på de olika sidorna om bländaren. Resultatet blir på formen

$$(102) \quad Pa^- = Qa^+ + Rb^-$$

Där a och b är modkoefficienterna (i praktiken får man välja ut en högsta mod för att operatorerna ska kunna beskrivas som ändlig-dimensionella tensorer) på vardera sida om bländaren, och $+$ och $-$ representerar olika propagationsriktningar. Vad vi räknar ut är alltså reflekterad och transmitterad som resultat av infallande. Tensorelementen fås enligt

$$(103) \quad P_n^m = \delta_n^m + \left(\frac{Y_n}{Y_m} - 1\right) \langle e_m, e_n \rangle_{\mathcal{L}}$$

$$(104) \quad Q_n^m = \langle e_m, e_n \rangle_{\mathcal{L}} - \delta_n^m$$

$$(105) \quad R_n^m = \frac{Y_n}{Y_m} \langle e_m, e_n \rangle_{\mathcal{L}}$$

Där \mathcal{L} beskriver den del av tvärsnittsytan som vid bländaren är öppen. Y_j är moden j s admittans. Vi kan notera att $P = R - Q$. På samma sätt måste vi ta hänsyn till infallande från andra hållet. Vi får då en ekvation på formen

$$(106) \quad Pb^+ = Ra^+ + Qb^-$$

Dessa typer av beräkningar kan även användas för att koppla samman flera vågledare eller två vågledare med olika tvärsnitt.

2.8 Dämpning i vågledare

Effektförluster i en vågledare sker framförallt av två anledningar. Vi har förluster i vågledarens material, och vi har förluster i väggarnas material. Förluster i vågledarens material har redan analyserats, om än i korthet.

2.8.0 Dämpning i väggarna, impedansvillkor och ytimpedans

Om vi släpper antagandet att mantelytans material är perfekt ledande så får vi en nollskild genomträngning av fälten. Detta leder till dämpning på grund av omhiska effektförluster. Om vi definierar *inträngningsdjupet* som den sträcka som leder till en dämpningsfaktor på e^{-1} får vi för ett material med permittivitet ϵ_c , permeabilitet μ_c och konduktivitet σ_c får vi, med antagandet att för metaller har vi $\sigma_c \gg \omega\epsilon_c$,

$$(107) \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_c\sigma_c}}$$

Exempelvis har vi att för koppar vid frekvensen 5 GHz blir $\delta = 0.93 \mu\text{m}$.

2.8.1 Fälteffekter i en god ledare, typ metall

Antag att en, mot vågledarens yta, infallande våg har en våglängd som är mycket längre än inträngningsdjupet. Antag vidare att ytans krökningsradie är mycket större än inträngningsdjupet. Då kan vi göra följande approximationer.

Det första villkoret leder till att fältets normalriktning mot ytan kan anses vara likriktat i en tillräckligt stor omgivning. Vi kallar denna riktning n .

Det andra villkoret leder till att förändringen längs ytan är liten i förhållande till förändringen genom ytan. Alltså kan vi sätta $\nabla \rightarrow \partial_n$.

I en god ledare får vi Maxwells rotationsekvationer enligt

$$(108) \quad \nabla \times E = -i\omega\mu_c H$$

$$(109) \quad \nabla \times H = \sigma_c E$$

Nu använder vi approximationen $\nabla \rightarrow \partial_n$ och får

$$(110) \quad \sigma_c E = n \times \partial_n H$$

Vi sätter in det i rotationen för E och får

$$(111) \quad n \times (n \times \partial_n^2 H) = n(n \cdot \partial_n^2 H) - \partial_n^2 H$$

$$(112) \quad = -i\omega\sigma_c\mu_c H$$

Våra antaganden säger att normalkomponenten av H kan försummas och då har vi en helmholtzekvation

$$(113) \quad (\partial_n^2 - i\omega\mu_c\sigma_c)H = 0$$

Vi inför

$$(114) \quad \begin{aligned} k_c &= \sqrt{-i\omega\mu_c\sigma_c} \\ &= (1-i)\sqrt{\frac{\omega\mu_c\sigma_c}{2}} \\ &= \frac{1-i}{\delta} \end{aligned}$$

Nu kan vi dela upp lösningen i en oscillerande och en dämpande faktor enligt:

$$(115) \quad \begin{aligned} H(r_n) &= H_{\parallel} e^{-ik_c r_n} \\ &= H_{\parallel} e^{-ir_n/\delta} e^{-r_n/\delta} \end{aligned}$$

Där vi infört symbolen H_{\parallel} som den tangentiella delen av fältet vid ytan. Ifrån våra tidigare ekvationer kan vi sätta in och få E -fältet enligt

$$(116) \quad E(r_n) = -\frac{1+i}{\sigma_c \delta} n \times H_{\parallel} e^{-ir_n/\delta} e^{-r_n/\delta}$$

Vi ser alltså att båda fältens normalkomponenter är mycket små och att deras tangentialkomponenter avtar exponentiellt. Enligt Ohms lag har vi alltså en liten ytströmtäthet (vilket alltså inte är precis vid ytan utan hela den tangentiella strömmen för i praktiken kommer den vara nära ytan), K som kan räknas ut enligt

$$(117) \quad \begin{aligned} K &= \int_0^{\infty} dr_n J \\ &= \sigma_c \int_0^{\infty} dr_n E \\ &= -n \times H_{\parallel} \end{aligned}$$

Vi kan ur detta räkna ut effekten som avges till ledaren per ytenhet, enligt Poyntings vektors normalkomponent:

$$(118) \quad \begin{aligned} \frac{dP}{dA} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(E_{\parallel} \times \overline{H_{\parallel}}) \cdot n \\ &= \frac{1}{2} R_S |K|^2 \end{aligned}$$

Där vi infört *ytresistansen* enligt $\frac{1}{\sigma_c \delta} = R_S$. Detta kan explicit räknas ut med hjälp av förhållandena

$$(119) \quad E_{\parallel} = -Z_S n \times H_{\parallel}$$

$$(120) \quad H_{\parallel} = \frac{1}{Z_S} n \times E_{\parallel}$$

Med *ytimepedansen* $Z_S = \frac{1+i}{\sigma_c \delta}$.

Vi tänker oss nu att fälten i en god vågledare dämpas i rummet då vågorna propagerar i z -led enligt

$$(121) \quad \psi(r) = \psi_0(\rho) e^{-ihz} f(z)$$

Där sista termen beskriver dämpningen i z -led, vilket alltså skulle vara den konstanta funktionen $f = 1$ i fallet perfekt ledare. Låt oss räkna ut effekttransporten, P , i ledaren genom att integrera Poyntings vektor längs med vågledaren över ett tvärsnitt, A .

$$\begin{aligned}
 P(z) &= \frac{1}{2} \int \text{ARe} E(r) \times \overline{H}(r) \cdot n_z dS \\
 (122) \quad &= (f(z))^2 \frac{1}{2} \int \text{ARe} E_0(\rho) \times \overline{H_0}(\rho) \cdot n_z dS \\
 &= (f(z))^2 P_0
 \end{aligned}$$

Där $O_0 = \frac{1}{2} \int \text{ARe} E_0(\rho) \times \overline{H_0}(\rho) \cdot n_z dS$ som alltså inte har något beroende av z . På så sätt kan vi enkelt derivera med avseende på z för att få energiförlusten per längdenhet längs med ledaren, P_l

$$(123) \quad P_l = -\frac{dP}{dz} = -2f\partial_z f P_0$$

Nu kan vi utnyttja vårt uttryck för energiflödet utåt, ekvation 118 för att räkna ut effektförlusten genom tvärsnittets randkurva, $\Gamma = \partial A$

$$\begin{aligned}
 P_l &= \int_{\Gamma} \frac{dP}{dA} dl \\
 (124) \quad &= \frac{R_S}{2} \int_{\Gamma} |H_{\parallel}|^2 \\
 &= (f(z))^2 \frac{R_S}{2} \int_{\Gamma} |H_0|^2
 \end{aligned}$$

Där vi noterar att sista likheten utnyttjar $n \cdot H_0(\rho) = 0$ för alla $\rho \in \Gamma$. En jämförelse mellan dessa två uttryck för energiförlusterna ger alltså att dämpningen måste uppfylla differentialekvationen

$$(125) \quad \partial_z f + \alpha f = 0$$

Som alltså avtar exponentiellt

$$(126) \quad f(z) \approx e^{-\alpha z}$$

Med *dämpningsfaktorn*

$$(127) \quad \alpha = \frac{R_S}{4P_0} \int_{\Gamma} |H_0|^2 dl$$

Denna dämpningsfaktor kan alltså läggas till i exponenten så att fälten får formen

$$(128) \quad \psi(r) = \psi_0(\rho) e^{-(\alpha+ih)z} f(z)$$

3 Hålrumsresonatorer

Om vi nu lämnar approximationen att vågledaren är oändlig måste vi ta hänsyn till randvillkoren i ledarens ändrar också. En sådan ledare kallas *hålrumresonator*. Vi använder samma notation som förut och tänker oss att vi sätter två plattor, en vid $z = 0$ och en vid $z = d$ sådana att vågledaren sluts. Vi har, precis som i föregående analys att det transversella fältet (som alltså går parallellt mot plattorna) måste vara 0 vid plattorna. Vi får alltså en diskretisering av det longitudinella vågtalet för någon mod, n , enligt

$$(129) \quad h_{nl} = \frac{l\pi}{d}, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Vi har alltså att det transversella vågtalet bestäms av tvärsnittet och det longitudinella av längden. Hela vågtalet bestäms alltså av hålrumresonatorns geometri

$$(130) \quad k_{nl} = \sqrt{q_n^2 + \left(\frac{l\pi}{d}\right)^2}$$

Där vi, precis som förut, har att l kan vara 0 för TM- men inte för TE-moder. Vi har alltså att fältet inuti resonatorn endast kan anta vissa specifika frekvenser som bestäms av geometrin, *resonansfrekvenser*. Vi kan använda förhållandet $\omega = kv$ för att få resonansfrekvenserna

$$(131) \quad f_{nl} = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{q_n}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{l}{d}\right)^2}$$

$v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ är fashstigheten i hålrumsmaterialet.

Rent allmänt har vi en tredimensionell helmholtzekvation med randvillkoren precis som förut. Det magnetiska fältets tangentialkomponent ska bevaras över gränssytan och det elektriska fältets tangentialkomponent ska vara noll vid gränssytan.

De olika moderna för E-fältet är ortogonala mot varandra

$$(132) \quad \int_V dV E_m \cdot E_n = \delta_{mn}$$

Och likadant för H-fältet. Vidare är upplagrad elektrisk fältenergi och magnetisk fältenergi lika över tid.

3.0 Icke perfekt ledande hålrumsresonator

Om vi nu låter materialet vara en god ledare i stället för en perfekt ledare så uppkommer förluster. Resonansfrekvenserna sänks en aning eftersom inträngningsdjupet gör att hålrumsresonatorn utvidgas litet.

Eftersom de olika moderna tränger in olika djupt i materialet får de frekvenser sådana att de inte längre är ortogonala. Vi får alltså koppling mellan moderna. Detta ger upphov till ett algebraiskt egenvärdesproblem.

3.1 Godhetstal, Q

Q -faktorn kallas *godhetstalet* ofta i engelsk litteratur, där Q står för 'Quality'. Den definieras som förhållandet mellan energin i hålrumsresonatorn vid en resonansfrekvens dividerat med energiförlusten under en period vid denna frekvens.

Q är ett mått på hur länge energin stannar i resonatorn då källor slås av. Om vi har en svag tidsdämpning, $\alpha_n \ll \omega_{rn}$, av fälten för någon mod, kommer Q -värdet för moden vara

$$(133) \quad Q_n = \frac{\omega_{rn}}{2\alpha_n}$$

Avtagandet av den lagrade energin i resonatorn blir alltså

$$(134) \quad \exp\left[-\frac{\omega_{rn}t}{2Q_n}\right]$$

Med Q_n kan vi beskriva sänkningen av resonansfrekvenserna på grund av väggförlusterna

$$(135) \quad \begin{aligned} \omega_{rn} &= \frac{\omega_{0n}}{1 + \frac{1}{2Q_n}} \\ &\approx \omega_{0n} \left(1 - \frac{1}{2Q_n}\right) \end{aligned}$$

Där den sista approximationen kan göras då Q_n är mycket stort, vilket det oftast är. ω_{0n} är resonansfrekvensen för moden i fallet perfekt ledare.

Bandbredden (fulla vidden vid halva maximum) hos en hålrumsresonator kan även det uttryckas med hjälp av godhetstalet med de lägre respektive högre frekvenserna

$$(136) \quad \omega_{Bn}^{\pm} = \omega_{rn} \left(1 \pm \frac{1}{2Q_n} \right)$$

Så bandbredden blir

$$(137) \quad \omega_{Bn}^{+} - \omega_{Bn}^{-} = \frac{\omega_{rn}}{Q_n}$$

4 Dielektriska vågledare och optiska fibrer

Nu lämnar vi de metalliska vågledarna och betraktar vågledare av dielektriska material sådana att materialet i vågledaren är optiskt tätare än omgivningen.

I vanlig ordning som förut så delar vi upp problemet i transversell och longitudinell del och variabelseparerar. Vi kan beskriva transversella fält i termer av longitudinella komponenten och dess derivator, precis som förr. Med materialparametrar har vi

$$(138) \quad H_T = \frac{-i}{q^2} [h \nabla_T E_z - k \eta n_z \times \nabla_T H_z]$$

$$(139) \quad E_T = \frac{-i}{q^2} [h \nabla_T H_z + \frac{k}{\eta} n_z \times \nabla_T E_z]$$

Om vi nu tänker oss att vi har en dielektrisk vågledare sådan att tvärsnittsytan är delad i två regioner som vi kallar a och b , så måste de var för sig, med sina materialparametrar uppfylla ovanstående ekvationer. Vi har vidare att det longitudinella vågtalet måste vara samma i varje delområde för att randvillkoret ska vara uppfyllt. Situationen kan jämföras med planvågsreflektion, se exempelvis [Fur22a].

Vi vet att tangentiella E-fältet måste bevaras vid en gränsyta och att det magnetiska fältets normal måste vara konstant, vilket ger

$$(140) \quad n \times E_{Ta} - \tau E_{za} = n \times E_{Tb} - \tau E_{zb}$$

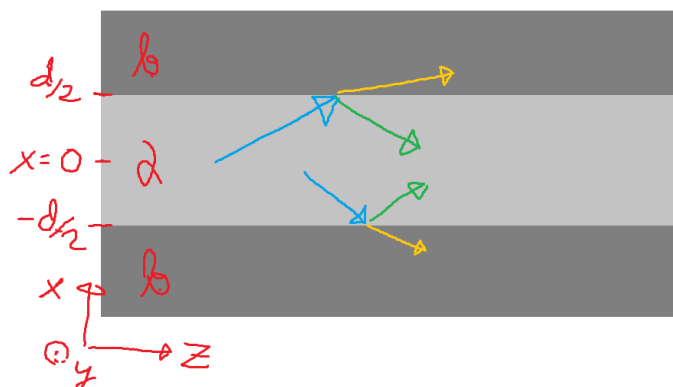
$$(141) \quad n \times H_{Ta} - \tau H_{za} = n \times H_{Tb} - \tau H_{zb}$$

Eftersp, första termerna i båda leden i båda ekvationerna ligger helt i z -riktningen får vi från ekvationerna fyra randvillkor. Vi kan explicit sätta in uttrycken för de tangentiella fälten för att uttrycka randvillkoren helt i longitudinella komponenter.

4.0 Plan vågledare

Låt oss föreställa oss ett skikt av något dielektriskt material mellan två halvrymder sådant att materialet är optiskt tätare än sin omgivning. Då kan totalreflektion uppstå och plana vågor kan inneslutas i skiktet (se figur 3). För enkelhetens skull ordnar vi koordinataxlarna sådana att skiktet ligger i $|x| < d/2$ och att vågtalet ligger helt ortogonalt mot y -koordinataxeln. I skiktet har vi materialparametrar ϵ_a och μ_a och utanför har vi samma fast $a \leftrightarrow b$. Vi har $\epsilon_a \mu_a > \epsilon_b \mu_b$.

Vågen har alltså inget y -beroende utan propagerar i z -led enligt e^{-ihz} . Detta z -beroende måste gälla både innanför och utanför skiktet.



Figur 3: Notation för dielektrisk vågledare i skikt. De färgade pilarna representerar vågens beteende vid gränssytan. Totalreflexion kan uppnås om det inre materialet är optiskt tätare än det omgivande.

Totalreflektion fås i fall infallsvinkeln är större än braggvinkeln (se exempelvis [Fur22a]), och det innebär att vågen stängs in i mellanskiktet så att det blir en vågledare. Vi delar upp studien i ett TM-fall, $\{H_y, E_x, E_y\}$ och ett TE-fall, $\{H_x, H_y, E_y\}$ som alltså är transversella med avseende på riktningen n_x .

Vi antar ett transversellt vågtal inuti skiktet, $q > 0$, och ett utanför skiktet, $-ip$, där $p > 0$. Alltså exponentiellt avtagande utanför skiktet precis som vi tänkte oss. En konsekvens av detta blir

$$(142) \quad k_a^2 = q^2 + h^2 k_b^2 = -p^2 + h^2$$

Vilket implicerar

$$(143) \quad k_a > h > k_b$$

Vi kan på gammalt hederligt sätt räkna ut reflektionskoefficienterna och en del annat. Vi börjar med TE-fallet.

4.0.0 TE-moder

Det transversella elektriska fältet ligger helt i y -led. De som färdas i positiv respektive negativ x -led blir

$$(144) \quad E_{ay}^+ = Ae^{-iqx} E_{ay}^- = Be^{iqx}$$

Vid den övre ytan ($x = d/2$) har vi att den första är infallande och den andra reflekterad. Vid den undre ytan har vi tvärt om. Totalreflexionsvillkoret ger reflexionskoefficienten

$$\begin{aligned}
 E_{\text{TE}} &= \frac{1 + i\Delta_{\text{TE}}}{1 - i\Delta_{\text{TE}}} \\
 (145) \qquad &= \frac{Be^{iqd/2}}{Ae^{-iqd/2}} \\
 &= \frac{Ae^{iqd/2}}{Be^{-iqd/2}}
 \end{aligned}$$

Där $\Delta_{\text{TE}} = \frac{p\mu_a}{q\mu_b}$. Tar vi de två sista leden och multiplicerar med varandras nämnare får vi $A^2 = B^2$. Vi har då en stående våg. I fallet $A = B$ så får vi $\Delta_{\text{TE}} = \tan\left(\frac{qd}{2}\right)$, och på liknande sätt för $A = -B$ får vi $\Delta_{\text{TE}} = \cot\left(\frac{qd}{2}\right)$. Dessa är alltså båda fallen, det symmetriska respektive det antisymmetriska. Vi kan använda våra uttryck för Δ_{TE} för att få vågtalen

$$(146) \qquad pd = \frac{\mu_b}{\mu_a} qd \tan\left(\frac{qd}{2}\right), \qquad \text{jämn symmetri}$$

$$(147) \qquad pd = -\frac{\mu_b}{\mu_a} qd \cot\left(\frac{qd}{2}\right), \qquad \text{udda symmetri}$$

Låt oss slutligen försöka hitta gränshänsor för de olika moderna. p och q kan vi få från vårt tidigare samband (ekvation 142)

$$\begin{aligned}
 (148) \qquad (qd)^2 + (pd)^2 &= (k_a d)^2 - (k_b d)^2 \\
 &= \omega^2 d^2 (\epsilon_a \mu_a - \epsilon_b \mu_b)
 \end{aligned}$$

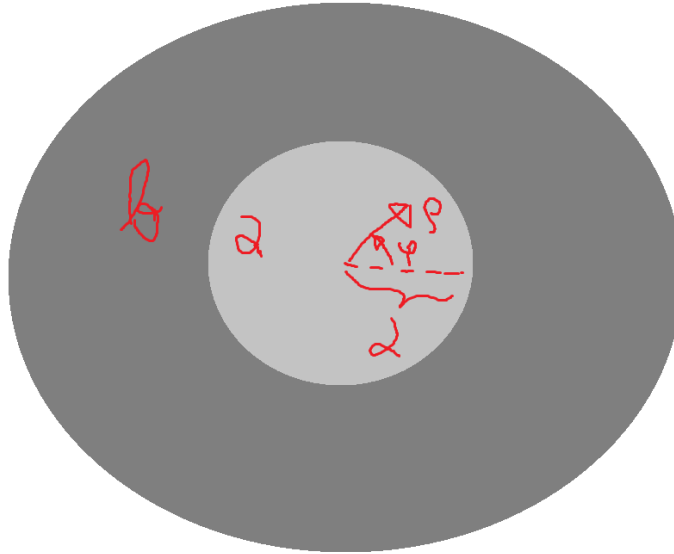
Vi får vår gräns då p går mot noll, vilket kommer innebära att fälten utanför skiktet slutar avta exponentiellt så att skiktet inte längre är en vågledare. Vi har från våra ekvationer att $p = 0$ då $qd = n\pi$ för $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Låt oss stoppa in det så får vi

$$(149) \qquad \omega_g = \frac{n\pi}{d\sqrt{\epsilon_a \mu_a - \epsilon_b \mu_b}}$$

Vi kan notera att moden som svarar mot $n = 0$ propagerar i vågledaren vid alla frekvenser.

4.0.1 TM-modor

TM-fallet kan analyseras på exakt samma sätt som TE-fallet genom att studera randvillkoren och göra ersättningen $\mu \leftrightarrow \epsilon$.



Figur 4: Notation för dielektrisk vågledare av typen optisk fiber.

4.1 Cirkulär dielektrisk vågledare – optisk fiber

En *optisk fiber* består av ett innermaterial, *kärna* med radie a , och ett yttermaterial, *mantel* (se figur 4). I vanlig ordning är kärnan optiskt tätare så att totalreflexion kan uppnås. I praktiken är manteln ändlig, men det behöver vi i denna analys inte ta hänsyn till eftersom vi tänker oss att fältet avtar så fort exponentiellt utanför kärnan.

Vi anfäller problemet precis som vi gjorde i tidigare avsnitt. Cylindrisk symmetri med vinkelberoende enligt $\sin(n\phi)$ och $\cos(n\phi)$. Variabelseparation. Vi får då i vanlig ordning besselfunktioner för det radiella beteendet som lösningar på differentialekvationen (Bessels differentialekvation)

$$(150) \quad \rho^2 \partial_\rho^2 P_i + \rho \partial_\rho P_i + (q_i^2 \rho^2 - n^2) P_i = 0, i = a, b$$

(Där a är inom kärnan och b manteln.) För reellt transversellt vågtal, q_i , kan vi skriva lösningarna som

$$(151) \quad \begin{aligned} P_i(\rho) &= A_i J_n(q_i \rho) + A_b N_n(q_i \rho) \\ &= B_a H_n^{(1)}(q_i \rho) + B_b H_n^{(2)}(q_i \rho) \end{aligned}$$

Där $H_n^{(1)} = J_n + iN_n$ och $H_n^{(2)} = J_n - iN_n$ är *hankelfunktioner* av första respektive andra slaget.

Om det transversella vågtalet är imaginärt så skriver vi $q_j = -ip_j$ och skriver lösningarna som

$$(152) \quad P_i(\rho) = C_a I_n(p_i \rho) + C_b K_n(p_i \rho)$$

där I_i och K_i är de *modifierade besselfunktionerna* av första respektive andra slaget.

Nu måste vi försöka rensa upp litet. I kärnan måste fälten vara begränsade för $\rho = 0$, vilket utesluter termer med N_n . I kärnan har vi alltså fält vars radiella beroende är proportionellt mot $J_n(q\rho)$.

På samma sätt kan vi utesluta lösningar med I_n i manteln eftersom de växer obegränsat för stor radie. Alltså har vi radiellt beroende proportionellt mot $K_n(p\rho)$ i manteln.

Vi kan se genom sambandet $J_n = \frac{1}{2}(H_n^{(1)} + H_n^{(2)})$, där hankelfunktionen av det första slaget betyder ingåtgående cylindrisk våg och det andra slaget innebär utåtgående cylindrisk våg, att vi har stående våg i kärnans tvärsnittsplan.

Vi kan definiera en dimensionslös parameter, V , som inom fiberoptik kallas den *normerade frekvensen*

$$(153) \quad \begin{aligned} V &= a\sqrt{k_a^2 - k_b^2} \\ &= \omega a \sqrt{\epsilon_a \mu_a - \epsilon_b \mu_b} \\ &\iff \\ (qa)^2 + (pa)^2 &= V^2 \end{aligned}$$

Vi måste här notera att detta begränsar qa såväl som pa till intervallet $[0, V]$ eftersom de båda är reella.

Nu försöker vi hitta moderna genom att sätta in randvillkoren. Villkoret att det elektriska och magnetiska fältens tangentialkomponenter ska bevaras över gränssytan ger

$$(154) \quad E_z = E_{z0} \Phi(\phi) \frac{J_n(q\rho)}{J_n(qa)}, \quad \rho < a$$

$$(155) \quad E_z = E_{z0} \Phi(\phi) \frac{K_n(p\rho)}{K_n(pa)}, \quad \rho > a$$

$$(156) \quad H_z = H_{z0} \Phi(\phi) \frac{K_n(q\rho)}{K_n(qa)}, \quad \rho > a$$

$$(157) \quad H_z = H_{z0} \Phi(\phi) \frac{K_n(p\rho)}{K_n(pa)}, \quad \rho > a$$

Löser vi för de övriga randvillkoren får vi en kopplad relation mellan H_z och E_z enligt

$$(158) \quad \frac{1}{q^2} \left[\frac{nh}{a} E_{z0} - k_a \eta_a \frac{q J'_n(qa)}{J_n(qa)} H_{z0} \right] = -\frac{1}{p^2} \left[\frac{nh}{a} E_{z0} - k_b \eta_b \frac{p K'_n(pa)}{K_n(pa)} H_{z0} \right]$$

$$(159) \quad \frac{1}{q^2} \left[-\frac{nh}{a} H_{z0} + k_a \eta_a^{-1} \frac{q J'_n(qa)}{J_n(qa)} E_{z0} \right] = -\frac{1}{p^2} \left[-\frac{nh}{a} H_{z0} - k_b \eta_b^{-1} \frac{p K'_n(pa)}{K_n(pa)} E_{z0} \right]$$

Vilket alltså kopplar de elektriska och magnetiska fälten.

4.1.0 TM-moder och TE-moder

Vi noterar att fallet $n = 0$, som alltså är rotationssymmetriskt, Φ konstant, så har vi ingen koppling mellan E_z och H_z . Det innebär att vi kan skriva allmänna lösningar i en bas av TE- och TM-moder. Vi studerar detta fall separat.

Vi börjar med TM. Vi har att

$$(160) \quad \frac{J'_0(qa)}{\eta_a qa J_0(qa)} = -\frac{k_b \eta_a K'_0(pa)}{k_a \eta_b pa K_0(pa)}$$

Nu kan vi utnyttja besselfunktionernas egenskaper $J'_0 = -J_1$ och $K'_0 = -K_1$ och $k/\eta = \omega\epsilon$ för att skriva om som

$$(161) \quad \frac{J_1(qa)}{qa J_0(qa)} = -\frac{\epsilon_b K_1(pa)}{\epsilon_a pa K_0(pa)}$$

För TE-fallet får vi på samma sätt

$$(162) \quad \frac{J_1(qa)}{qa J_0(qa)} = -\frac{\mu_b K_1(pa)}{\mu_a pa K_0(pa)}$$

Ur dessa funktioner kan vi inte lösa ut pa eller qa explicit.

Gränshänsorna fås då $J_0(V) = 0$. Vi kallar dessa nollställen för ξ_{0m} . Detta ger oss

$$(163) \quad \omega_g = \frac{\xi_{0m}}{a \sqrt{\epsilon_a \mu_a - \epsilon_b \mu_b}}$$

4.1.1 HE- och EH-moder

För fallet $n > 0$ har vi koppling mellan E_z och H_z . Vi får alltså inga TE- eller TM-moder utan bara *hybridmoder*.

Dessa hybridmoder delas upp i moder där det elektriska fältets z -komponent dominerar och moder där det magnetiska fältets z -komponent dominerar. Dessa kallas EH- respektive HE-moder. Vi definierar en dimensionslös kvot, F , enligt

$$(164) \quad F = \frac{E_{z0}}{\eta_a H_{z0}}$$

Låt oss kalla fallet där $|F| > 1$ för EH och $|F| < 1$ för HE.

Utan att gå in för mycket på teorin, som är ganska krånglig, får vi att det för varje $n < 0$ finns en EH-, och en HE-mod med tillhörande gränshäufigheter.

5 Vågledare på kretskort – planära överföringslinor

Vid studier av signaler inom mikrovågsområdet används ibland vågledare för att koppla samman komponenter på kretskort. Detta kapitel tar upp några former av vågledare på kretskort utan att gå lika matematiskt djupt inom ämnet som den mer allmänna vågledardiskussionen ovan. Kapitlet syftar mer till en kvantitativ överblick av teknologierna.

Kretskort är ofta platta och byggda i skikt av olika material. Signaler leds längs ledare, vanligen metall, i något massivt, dielektriskt material. Detta kan ske i parallella skikt. Likaså återfinns parallella jordplan. Jordplanen och ledarplanen har isolering mellan sig av antingen luft eller, mer ofta, något dielektriskt material.

Det går ju såklart att använda vilken typ av vågledare man önskar i ett kretskort, men *planära överföringslinor* är ett alternativt som har flera fördelar; inte minst att de tillverkas med samma process som resten av kretskortet (fotolitografiprocesser) och därför lämpar sig väl för massproduktion och att de är lätta att få plats med på kortet. Nackdelen är att de för högre frekvenser innebär för stora förluster, så då föredras andra typer av vågledare, så som optiska fibrer.

Planära överföringslinor kommer i många olika varianter som lämpar sig för olika syften (typ olika frekvensområden) och stöder olika typer av moder. Val av material spelar också roll. Låt oss studera några vanliga typer.

5.0 Stripline

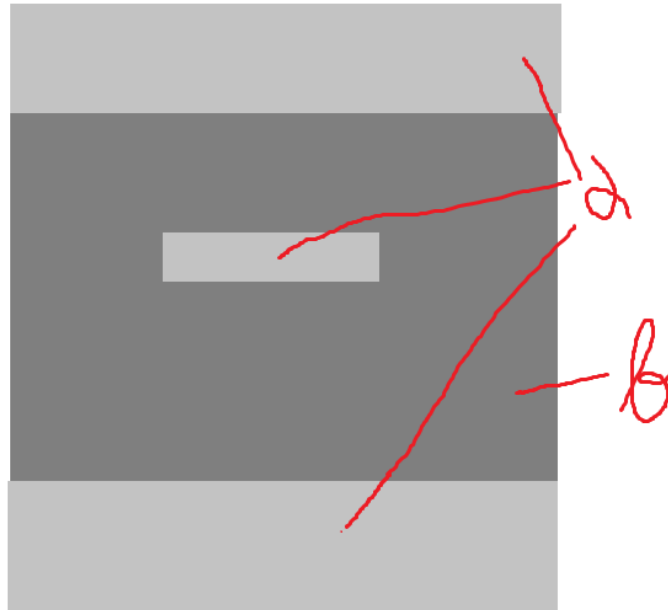
En *stripline* är en mycket simpel typ av planär överföringslina. Den består av en ledande remsa (*eng*: strip) som ligger i ett dielektriskt substrat mellan två jordplan (se figur 5).

Om man önskar samma potential för de två jordplanen (i syfte att begränsa tillåtna moder) kan de slutas genom exempelvis vior.

Vi noterar att vi har två olika potentialer för ledaren i en stripline. Det innebär att vi kommer ha TEM-moder, och som vi minns har dessa ingen gränshfrekvens. Stripline-linor är inte lika känsliga för störningar som många andra överföringslinor.

Eftersom vågorna propagerar i det dielektriska substratet bestäms deras utbredningshastighet av materialparametrarna, permittiviteten och permeabiliteten. Den karaktäristiska impedansen bestäms av remsans bredd och substratets tjocklek och permittivitet.

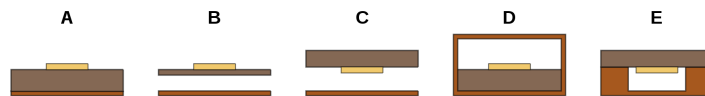
Önskas mindre förluster i det dielektriska materialet kan en variant byggas i vilken ledaren hänger mellan jordplanen, omgiven av enbart luft. Se figur 6 för varianter.



Figur 5: Vanlig typ av stripline.



Figur 6: Olika typer av stripline-linor. A vanlig. B upphängd. C bilateral. D två ledare.



Figur 7: Olika typer av microstrip-linor. A vanlig. B upphängd. C inverterad. D omsluten. E omsluten och inverterad.

5.1 Microstrip

En *microstrip* är en lina som består av en ledande remsa på ett dielektriskt skikt som i sin tur ligger på ett jordplan. Vågen propagerar då med en del i luften ovanför remsan och med en del i substratet. Detta resulterar i något som kallas kvasi-TEM-moder, vilket inte alltid är önskvärt.



Figur 8: Olika typer av koplanära vågledare. A vanlig. B ledarbackad koplanär vågledare (CBCPW, *eng*: conductor backed coplanar waveguide). C koplanära remsor. D inbäddade koplanära remsor.

Microstrip är lätt att tillverka, men har några nackdelar. Den är begränsad i intervallet av karaktäristiska impedanser den kan uppnå.

Microstrip har en tendens att bli störd, och på samma sätt störa, fältet omkring sig. Detta kan leda till önskade och oönskade effekter i antenssammanhang. Det är lätt att bygga lappantennerna av microstrip-linor. En variant av dessa, *inverterad F-antenn* är mycket vanlig inom mobiltelefoner och surfplattor för GSM, blåtand och WLAN, och såklart inom många andra områden.

Varianter av microstrip inkluderar en upphängd variant, i vilken mer fält går igenom luften, inverterad, med samma syfte, innesluten och inverterad innesluten. De två sista innebär att linan innesluts av jordplanet, vilket komplicerar tillverkningsprocessen, men har fördelen att oönskade kopplingseffekter. Se figur 7 för varianter.

5.2 Koplanära vågledare

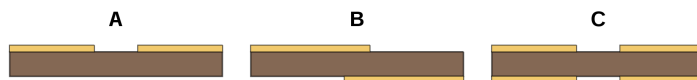
I typen *koplanär vågledare* så används inget jordplan. I stället delas ledaren upp i ledare och återledare, som monteras på ett dielektriskt substrat. Precis som microstrip fås kvasi-TEM-moder.

Koplanära vågledare är enkla att tillverka eftersom de bara består av ledare i ett plan och därför lätt ansluts till ytmonterade komponenter. De har även fördelen att de går att modifiera till ett brett spann av karaktäristiska impedanser, eftersom den kommer bero av de relativa bredderna av ledarna och avstånden mellan dem.

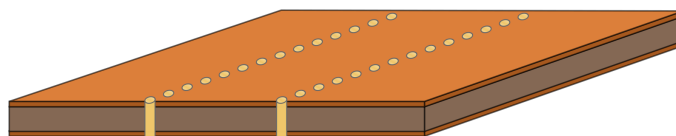
Nackdelarna med koplanära vågledare är att de tar upp yta på kretskortet som därför konkurrerar med andra ytmonterade komponenter. Dessutom finns problemet med oönskade moder, och för att ta itu med dem krävs lösningar som tar bort simpliciteten som var så lockande med koplanära vågledare. Exempelvis kan man använda ett intilliggande jordplan för att motverka potentialbalanser. Se figur 8 för varianter.

5.3 Slotline

En *slotline* är en lina som utgör dualen till microstrip. I stället för en ledare omsluten av ett dielektrikum har vi en dielektrisk remsa omsluten av ledare. Den dominanta moden är en hybridmod som har en svag longitudinell E-fältkomponent.



Figur 9: Olika typer av slotline-linor. A vanlig. B antipodal. C bilateral.



Figur 10: Vågledare integrerad i substrat. Två ledande plan sammanbinds med parallella rader av vior som går igenom ett midskikt av något dielektrikum.

Fördelar med slotline är att de kan byggas med stort spann och god noggrannhet vad gäller karaktäristisk impedans. Nackdelar är att impedansen varierar starkt med frekvens och att de ofta har lågt godhetstal.

Varianter finns. *Antipodal* kallas en typ som har ledarna på var sin sida om substratet och den används då låg karaktäristisk impedans önskas. Se figur 9 för varianter.

5.4 Substratintegrerad vågledare

En *substratintegrerad vågledare* byggs genom att genom ett dielektriskt skikt mellan två jordplan sätta ett par parallella rader av vior. Detta leder till kvasi-TE-moder. Se figur 10.

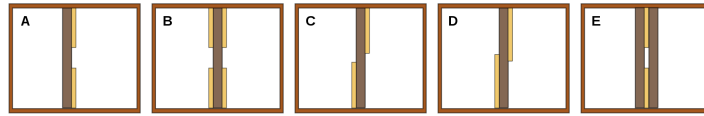
Det finns flera fördelar med denna metod. Den är lätt att integrera med andra kretselement. Den strålar inte så mycket som flera andra (även om det går att bygga en hornantenn genom att låta viorna vika ut i en ände). Den har högt godhetstal.

5.5 Finline

Finline-linor byggs inuti rektangulära metalliska vågledare. De kan betraktas som en sköldad slotline.

Finline-linor kan användas för höga frekvenser, flera hundra GHz. För höga frekvenser har de mindre förluster än flera andra typer av vågledare.

Olika alternativ finns. Den bilaterala har högt godhetstal. Antipodala har låg karaktäristisk impedans. Se figur 11



Figur 11: Varianter av finline-linor. A standard. B bilateral. C antipodal. D starkt kopplad antipodal. E insulerad.

5.6 Övergångar i planära överföringslinor

På ett kretskort kan olika lösningar lämpa sig olika bra i olika regioner och då kan man behöva koppla samman olika teknologier.

Om det blir oanpassning i impedanserna kan reflexionsfenomen uppstå, vilket kan vara oönskat.

Om byte av dominerande mod sker så blir det komplicerat och löses vanligen med en småskalig antenn

6 Utstrålning från lokala oscillerande system av laddningar och strömmar

Nu ska vi börja studera elektromagnetisk strålning; var den kommer ifrån och hur den beter sig. Vi har tidigare undersökt elektromagnetiska fält i källfria regioner som lösningar på vågekvationen i olika geometrier, men aldrig tagit upp varifrån fältstörningarna kommer. Laplace-utvecklingen kommer att ske medelst sfäriska harmoniker och Legendre-polynom. Om man känner sig obekvämt med sådant kan man repetera i exempelvis ?? eller ??. Om man inte bryr sig djupare om matematiken kan man nog läsa på ändå.

6.0 Fält från lokal oscillerande källa

Vi kan, med superpositionsprincipen i åtanke, betrakta ett system av olika frekvenser som en summa av delsystem med individuella frekvenser. Efter en fouriertransform fås en uppdelning med avseende på frekvens och med den kan vi studera system av laddningar och strömmar som varierar sinusformigt i tiden:

$$(165) \quad \rho(t, x) = \rho(x)e^{-i\omega t}$$

$$(166) \quad J(t, x) = J(x)e^{-i\omega t}$$

Där, som vanligt, realdelen representerar det fysikaliska. Vektorpotentialen, A , blir då

$$(167) \quad A(x) = \frac{1}{c} \int J(\xi) \frac{e^{ik|x-\xi|}}{|x-\xi|} d^3\xi$$

Där k , precis som tidigare, är vågtalet $k = \omega/c$. Magnetfältet från en sådan potential blir

$$(168) \quad B = \nabla \times A$$

Och i de källfria regionerna (alltså utanför vårt lokala oscillerande system) har vi

$$(169) \quad E = \frac{i}{k} \nabla \times B$$

Genom att explicit beräkna integralen ovan för A kan vi räkna ut de magnetiska och elektriska fälten. Det är emellertid inte alltid enkelt att göra det. Innan vi

funderar vidare på det så undersöker vi några allmänna egenskaper för fälten som gäller om källan är lokaliserad i en region som är liten i förhållande till våglängden.

Låt oss kalla våglängden $\lambda = 2\pi c/\omega$ och källornas rumsliga storleksordning d . Vi delar in rummet i tre regioner, *närfältet*, *mellanfältet* och *fjärrfältet* enligt:

- (170) $d \ll r \ll \lambda$, Närfältet, den statiska regionen
 (171) $d \ll r \approx \lambda$, Mellanfältet, den induktiva regionen
 (172) $d \ll \lambda \ll r$, Fjärrfältet, den strålande regionen

6.0.0 Närfältet

Vi kan börja med att betrakta närfältet, i vilket vi har $r \ll \lambda \implies e^{-ikx} \approx 1$. Detta innebär alltså att vi har att exponentialen i vårt uttryck för vektorpotentialen blir konstant. Denna typ av vektorpotential kan behandlas och resultatet blir fält som oscillerar i tiden som $e^{-i\omega t}$, men i övrigt stationärt. Vi kallar detta för *kvasistationärt*.

6.0.1 Fjärrfältet

I fjärrfältet har vi $kr \gg 1$ så exponentialen i vektorpotentialen oscillerar kraftigt och har alltså stor inverkan på vektorpotentialen. Vidare kan vi göra approximationen

$$(173) \quad |x - \xi| \approx r - n \cdot \xi$$

Där n är en normerad riktningsvektor i riktningen för x . Vidare kan nämnaren approximeras med $|x - \xi| \approx r$ och då får vi en vektorpotential som i gränsen $kr \rightarrow \infty$ går mot

$$(174) \quad A(x) = \frac{e^{ikr}}{cr} \int J(\xi) e^{-ikn \cdot x} d^3\xi$$

Alltså får vi att vektorpotentialen i fjärrfältet uppträder som en utåtgående sfärisk våg. Fälten från denna potential dör av med en faktor $\frac{1}{r}$. Om vi har att källans dimensioner är små jämfört med våglängden kan vi utveckla integralen i en potensserie i k

$$(175) \quad A(x) = \frac{e^{ikr}}{cr} \sum_m \frac{(-ik)^m}{m!} \int J(\xi) (n \cdot \xi)^m d^3\xi$$

Så styrkan för den mte termen blir

$$(176) \quad \frac{1}{m!} \int J(\xi)(kn \cdot \xi)^m d^3\xi$$

Eftersom vi integrerar över källområdet (variabeln ξ i integralen) som är av storleksordningen d och $kd \ll 1$ så kommer dessa termer dö av fort med ökande m . Alltså behöver vi ofta bara ta hänsyn till några få termer i utvecklingen.

6.0.2 Mellanfältet

I mellanfältet kan vi inte göra approximationer av typen vi gör för fjärrfältet utan vi får ta hänsyn till alla potenser av kr . Vi får någonting i stil med

$$(177) \quad A(x) = \frac{4\pi ik}{c} \sum_{l,m} h_l^{(1)}(kr) Y_{lm}(\theta, \phi) \int J(\xi) j_l(kr_\xi) Y_{lm}^*(\theta_\xi, \phi_\xi) d^3\xi$$

Om klotyfefunktioner och annat är obekant kan man som sagt repetera i exempelvis ?? eller [Fol09].

6.1 Elektriska dipolfält och utstrålning

Låt oss studera den första termen i utvecklingen för vektorpotentialen

$$(178) \quad A(x) = \frac{e^{ikr}}{cr} \int j(\xi) d^3\xi$$

Vi kan använda partiell integration för att skriva om som

$$(179) \quad \begin{aligned} \int J d^3\xi &= - \int \xi (\nabla \cdot J) d^3\xi \\ &= -i\omega \int \xi \rho(\xi) d^3\xi \end{aligned}$$

Där vi använt kontinuitetsekvationen

$$(180) \quad i\omega\rho = \nabla \cdot J$$

Så vektorpotentialen blir

$$(181) \quad A(x) = -ikp \frac{e^{ikr}}{r}$$

Där vi definierat *elektriska dipolmomentet*, p , enligt

$$(182) \quad p = \int \xi \rho(\xi) d^3\xi$$

Utifrån denna vektorpotential kan vi räkna ut magnetiska och elektriska fälten enligt

$$(183) \quad B = k^2(n \times p) \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right)$$

$$(184) \quad E = k^2(n \times p) \times n \frac{e^{ikr}}{r} + [3n(n \cdot p) - p] \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2}\right) e^{ikr}$$

Om allt detta med dipoler känns obekvämt kan det repeteras i exempelvis [Jac62], [Nor] eller [Che89]. Vi kan notera här att det magnetiska fältet är helt vinkelrätt mot n , medan det elektriska fältet har komponenter både parallellt och vinkelrätt mot n .

I fjärrfältet får vi beteende enligt

$$(185) \quad B = k^2(n \times p) \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$(186) \quad E = B \times n$$

I närfältet å andra sidan får vi

$$(187) \quad B = ik(n \times p) \frac{1}{r^2}$$

$$(188) \quad E = [3n(n \cdot p) - p] \frac{1}{r^3}$$

I närfältet, där vi har $kr \ll 1$, dominerar det elektriska fältet över det magnetiska med en faktor kr .

Låt oss även undersöka hur effekt strålar i olika riktningar. Vi har

$$(189) \quad \frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi} \Re[r^2 n \cdot (E \times \bar{B})]$$

Vi sätter in våra uttryck för E och B i fjärrfältet och får

$$(190) \quad \frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi} k^4 |n \times (n \times p)|^2$$

Om dipolen är i fas fås dipolmönstret

$$(191) \quad \frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi} k^4 |p|^2 \sin^2 \theta$$

Där θ är polarvinkeln från p -riktningen. Total utstrålad effekt är

$$(192) \quad P = \frac{ck^4}{3} |p|^2$$

6.1.0 Mittmatad linjär antenn, dipolantenn

Ett enkelt exempel på en utstrålande dipol är den *mittmatade linjära antennen*, ibland helt enkelt kallad *dipolantenn*, även om det uttrycket även används för andra typer.

Låt oss föreställa oss en tunn ledare som ligger längs z -axeln, sådant att den ligger i intervallet $[-d/2, d/2]$, förutom en smal glipa runt $z = 0$. Strömmen i ledaren är i samma riktning i båda halvorna, med ett värde, J_0 vid gapet och linjärt avtagande mot noll vid ändpunkterna

$$(193) \quad J(z)e^{-i\omega t} = J_0 \left(1 - \frac{2|z|}{d}\right) e^{-i\omega t}$$

Vi kan använda kontinuitetsekvationen (180) för att bestämma den längdladdningstätheten, ρ_ℓ enligt

$$(194) \quad \rho_\ell(z) = \pm \frac{2iJ_0}{\omega d}$$

Där vi har $+$ för positiva z och $-$ om för negativa. Vi räknar ut dipolmomentet med, som alltså ligger helt i z -riktningen

$$(195) \quad \begin{aligned} p &= \int_{-d/2}^{d/2} dz \rho_\ell(z) z \\ &= \frac{iJ_0 d}{2\omega} \end{aligned}$$

Vi sätter in i vårt uttryck för utstrålad effekt per rymdvinkel

$$(196) \quad \frac{dP}{d\Omega} = \frac{J_0^2}{32\pi c} (kd)^2 \sin^2 \theta$$

Med total utstrålad effekt

$$(197) \quad P = \frac{J_0^2}{12c} (kd)^2$$

Vi kan notera att för fix amplitud, J_0 , ökar utstrålad effekt proportionellt mot ökningen av kvadraten av frekvensen. Detta gäller då $kd \ll 1$, alltså då våglängden är mycket längre än antennen.

6.2 Elektriska kvadrupolfält och magnetiska dipoler

Nu tar vi hänsyn till nästa term i vektorpotentialen

$$(198) \quad A(x) = \frac{e^{ikr}}{cr} \left(\frac{1}{r} - ik \right) \int J(\xi) (n \cdot \xi) d^3\xi$$

Denna studerar vi genom att dela upp integranden i en symmetrisk term och en antisymmetrisk term enligt

$$(199) \quad \frac{1}{c} (n \cdot \xi) J = \frac{1}{2c} [(n \cdot \xi) J + (n \cdot J) \xi] + \frac{1}{2c} (\xi \times J) \times n$$

Vi känner igen den sista, antisymmetriska, termen som magnetiseringen från strömmen,

$$(200) \quad \mathcal{M} = \frac{1}{2c} (x \times J)$$

Den första, symmetriska, termen kommer visa sig vara den elektriska kvadrupolens momenttäthet.

Vi fortsätter studera den antisymmetriska termen. Om vi bara tar hänsyn till den får vi vektorpotentialen

$$(201) \quad A(x) = ik(n \times m) \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right)$$

Där m är det magnetiska dipolmomentet

$$(202) \quad \begin{aligned} m &= \int \mathcal{M} d^3x \\ &= \frac{1}{2c} \int d^3x (x \times J) \end{aligned}$$

Vi noterar att vektorpotentialen är proportionell mot magnetiska induktionen för en elektrisk dipol. Vi kan helt enkelt göra ersättningarna $E \rightarrow B$ och $p \rightarrow m$ så att vi får det magnetiska fältet

$$(203) \quad B = k^2(n \times m) \times n \frac{e^{ikr}}{r} + [3n(n \cdot m) - m] \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right) e^{ikr}$$

På samma sätt kan vi göra ersättningen $B \rightarrow -E$ och få

$$(204) \quad E = -k^2(n \times m) \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right)$$

Våra resonemang angående närfält och fjärrfält stämmer för magnetisk dipol på samma sätt som för elektrisk dipol med ersättningarna $E \rightarrow B$, $B \rightarrow -E$, $p \rightarrow m$. Samma argument gäller även för effektutstrålningarna.

En viktig skillnad är polarisationen. För en elektrisk dipol ligger E i planet som spänns av n och p , medan för en magnetisk dipol ligger det i normalen till planet som spänns av n och m .

Nu fortsätter vi med den symmetriska delen. Vi använder kontinuitetsekvationen och partiell integration för att skriva om som

$$(205) \quad \frac{1}{2c} \int [(n \cdot x)J + (n \cdot J)x] d^3x = -\frac{ik}{2} \int x(n \cdot x)\rho(x) d^3x$$

Detta motsvarar en *elektrisk kvadrupol*. Vektorpotentialen blir

$$(206) \quad A(x) = -\frac{k^2 e^{ikr}}{2r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \int \xi(n \cdot \xi)\rho(\xi) d^3\xi$$

Fälten blir rätt komplicerade att nedteckna explicit så vi nöjer oss med fälten i fjärrfältet

$$(207) \quad E = ik(n \times A) \times n$$

$$(208) \quad B = ikn \times A$$

Den magnetiska induktionen kan vi alltså skriva som

$$(209) \quad B = -\frac{ik^3 e^{ikr}}{2r} \int (n \times \xi)(n \cdot \xi) \rho(\xi) d^3 \xi$$

Nu inför vi *kvadrupoltensorn*, $Q_{\alpha\beta}$ enligt (notera tom självkontraktion)

$$(210) \quad Q_{\alpha\beta} = \int (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) \rho(\xi) d^3 \xi$$

Med den kan vi skriva om integralen i uttrycket för B till

$$(211) \quad n \times \int \xi(n \cdot \xi) \rho(\xi) d^3 \xi = \frac{1}{3} n \times Q(n)$$

Där vi infört Q som har komponenter

$$(212) \quad Q_\alpha = \sum_\beta Q_{\alpha\beta} n_\beta$$

Till slut kan vi skriva om den magnetiska induktionen som

$$(213) \quad B = -\frac{ik^3 e^{ikr}}{6r} n \times Q(n)$$

Med effektutstrålning

$$(214) \quad \frac{dP}{d\omega} = \frac{c}{288\pi} k^6 |n \times Q(n)|^2$$

Efter mycket slit kan man integrera över hela sfären för att få total effektutstrålning

$$(215) \quad P = \frac{ck^6}{360} \sum_{\alpha,\beta} |Q_{\alpha\beta}|^2$$

Effekten ökar alltså med sjättepotensen av frekvensen för ett fixt kvadrupolmoment.

6.2.0 Åter: mittmatad linjär antenn

Vi går tillbaka till exemplet tidigare med den mittmatade linjära antennen med samma beteckningar som vi då använde. Om vi för en stund försummar utstrålning så har vi att strömmen längs antennen kommer ha ett sinusoidalt beteende både i tid och längs z -axeln, med ett vågtal $k = \omega/c$. Strömmen försvinner mot antennens ändpunkter, Strömtätheten kan skrivas som

$$(216) \quad J(x) = J_m \sin\left(\frac{kd}{2} - k|z|\right) \delta(x)\delta(y)n_z$$

I regionen $z \in [-d/2, d/2]$. Om vi har $kd > \pi$ kommer högsta strömmen vara J_m . Strömmen precis vid gapet är $J_0 = J_m \sin(kd/2)$.

Vi kan nu uttrycka vektorpotentialen i fjärrfältet som

$$(217) \quad \begin{aligned} A(x) &= n_z \frac{J_m e^{ikr}}{cr} \int_{-d/2}^{d/2} \sin\left(\frac{kd}{2} - k|z|\right) e^{-ikz \cos \theta} dz \\ &= n_z \frac{2J_m e^{ikr}}{ckr} \left[\frac{\cos\left(\frac{kd}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{kd}{2}\right)}{\sin^2 \theta} \right] \end{aligned}$$

Den magnetiska induktionen i fjärrfältet ges av $B = ikn \times A$ med storlek $|B| = k \sin \theta |n_z \cdot A|$. Alltså ges effektstrålningen av

$$(218) \quad \frac{dP}{d\Omega} = \frac{J_m^2}{2\pi c} \left| \frac{\cos\left(\frac{kd}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{kd}{2}\right)}{\sin \theta} \right|^2$$

Polariseringen ligger i planet som spänns av antennen och riktningen till observatören.

Vi ser att vinkelberoendet för effektutstrålningen beror av kd . Har vi $kd \ll 1$ återfår vi dipolfallet. Sätter vi in $kd = \pi$ får vi en halv våglängd, kallas *halvvågsantenn*, av strömoscillation längs antennen och effektutstrålning enligt

$$(219) \quad \frac{dP}{d\Omega} = \frac{J_m^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{2\pi c \sin^2 \theta}$$

Och för specialfallet $kd = 2\pi$ har vi en hel våglängd av strömoscillation längs antennen, kallas *helvågsantenn*, med effektutstrålning enligt

$$(220) \quad \frac{dP}{d\Omega} = \frac{J_m^2 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{2\pi c \sin^2 \theta}$$

Halvågsantennens effektutstrålning liknar ett dipolmönster, medan halvågsantennen har ett skarpare mönster.

Det går att superponera flera simplare antenner, så som halvågsantenner, till antenner med mer sofistikerade, rentav godtyckliga, strålningsmönster.

Avslutningsvis tål det att sägas att denna inledande genomgång av antenner är starkt idealiserad och bara tjänar till att förstå principerna som ligger till grund för praktiska antenner. I verkligheten är antennerna inte perfekta ledare utan har materialförluster, excitationsgapet i mittmatade antenner är inte alltid försumbart, strömmarna är inte sinusoidala &sv.

7 Allmänt om antenner

Med den teoretiska grunden för utstrålning av EM-fält från lokaliserade källfördelningar ska vi, med mindre matematisk noggrannhet, studera *antenn*er.

Antenner är manicker som utstrålar, emitterar, eller mottar, absorberar, EM-vågor. De tjänar som övergång mellan media, vanligtvis vågledare \leftrightarrow luft, vågledare \leftrightarrow vågledare eller ledare \leftrightarrow luft. Önskvärt är att antennen effektivt överför energi från ledaren till vågor, och tvärtom, och att dess utstrålningsmönster har ett specifikt utseende.

7.0 Antenntyper

Innan vi börjar studera antennerna för sig så inleder vi med att klassificera antennerna i några kategorier.

7.0.0 Ledarantenn

Precis som vi i tidigare avsnitt varit inne på kan antenner byggas av tunna ledare. Vi har redan visat den mittmatade raka ledaren som blir en dipolantenn genom att accelerera laddningar i den. Raka ledare behöver inte heller vara mittmatade utan monopolantenn är matade i ena änden och monterade över ett jordplan.

En annan variant är att bilda en slinga med ledaren. Detta kan göras i olika geometrier, cirkulära, ellipsoida, kvadratiske &sv.

Man behöver inte heller begränsa sig till ett varv utan man skulle kunna göra en spiral av ledaren med.

7.0.1 Hornantenn

En *hornantenn* fungerar för EM-vågor så som en trumpet fungerar för ljudvågor. Den används för att stråla ut från vågledare genom att balansera impedansen mot luftens impedans. Dessa antenner är användbara för området 1 till 20 GHz.

Hornantenn kommer i flera olika geometrier så som pyramidiska och koniska. De kan vara räfflade eller ha kammar inuti för att välja ut moder eller polariseringar.

7.0.2 Kretskortsantenn

Kretskortsantenn är metalliska ledare som etsats på dielektriska substrat som vanligtvis har ett metalliskt jordplan på andra sidan. Dessa kommer främst i två varianter: lapp och lucka.

Lappantenn (*eng*: Patch Antennae) består av en metallyta som agerar antenn. Geometrin på denna bestämmer antennens egenskaper. Den kan vara fyrkantig, rund, pentagonisk, cirkelsektor, halvcirkel, ring och många andra former.

Luckantenner (eng: Slot Antennae) består av utskärningar i en ledare. En vanlig geometri är den så kallade *Vivaldi-antennen* som är mycket populär för frekvenser över 1 GHz.

Kretskortsantenner är i allmänhet billiga och enkla att tillverka samtidigt som de är mekaniskt robusta och lätta i vikt. Detta gör att de gärna används i mobila enheter och fordon.

7.0.3 Läckageantenner

Om vi introducerar periodiska diskontinuiteter i en vågledare så fås *Läckageantennen*. Dessa är lämpade för frekvenser över 30 GHz och byggs av dielektriska vågledare, microstrip, slotline och andra koplanära vågledare.

7.0.4 Reflektorantenner

En parabolisk yta reflekterar parallella strålar till en punkt som kallas *brännpunkt* eller *fokus*. *Reflektorantennen* byggs för att fokusera inkommande EM-vågor (eller parallellisera utåtgående). De har hög direktivitet men är ofta stora och klumpiga.

7.0.5 Linsantenner

På samma sätt som reflektorer kan användas så går även linser bra. *Linsantennen* föredras över reflektorantennen för höga frekvenser, typ 100 GHz och uppåt.

7.1 Antennfält

Som nämndes tidigare kan antenner superponeras för att åstadkomma nya strålningsmönster. Oftast tar man identiska antenner och sätter upp enligt någon geometri. Genom att noggrant justera fas och amplitud hos matningen för enskilda antenner kan mycket specifika utstrålningsmönster uppnås.

8 Antennparametrar

A Notation och definitioner

Den mesta notationen följer standardnotation. Se [Fur22c] och [Fur22a] för mer utförlig beskrivning av notationen och fall där tvetydigheter kan uppstå.

B Förkunskaper

Läsaren rekommenderas att läsa den första delen, [Fur22a], för att få en förståelse för den grundläggande teorin. Kapitel som är markerade med \star får anses kräva matematisk mognad långt utöver vad som fordras för resten av artikeln.

B.0 Naturfilosofi

Läsaren bör ha åtminstone grundläggande kunskap inom

- ★ Klassisk mekanik
- ★ Elektrodynamik, se exempelvis [Fur22a]
 - ∅ EM-fält i närvaro av material
 - ∅ Tidsharmoniska fält
 - ∅ Plana vågor

För avsnitt markerade med \star bör läsaren även vara bekväm med

- ★ Analytisk mekanik
- ★ Relativitetsteori

B.1 Matematik

Läsaren bör ha åtminstone grundläggande kunskap inom

- ★ Linjär algebra
- ★ Analys (typ $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$)
- ★ Geometri

För avsnitt markerade med \star bör läsaren även vara bekväm med

- ★ Multilinjär algebra
- ★ Differentialgeometri (i synnerhet Riemannsk geometri)
- ★ Yttre algebra
- ★ Variationskalkyl

C Vidare läsning

Den intresserade läsaren kan såklart ta vid och läsa de böcker som författaren själv stöttat sig på under skrivandet av denna artikel. För elektrodynamiken i allmänhet användes främst [Nor], [Jac62], [Che89] och [Hec15]. För de mer matematiskt inriktade delarna användes även [cederwall] och [al01]. För delarna om vågrörelse användes även [Agr97] och [Col92].

Referenser

- [Fur22a] Anders Furufors. *Elektromagnetiska fält, vågledare och antenner, Del I: Elektrodynamikens principer*. 2022.
- [Fur22b] Anders Furufors. *Elektromagnetiska fält, vågledare och antenner, Del III: Informationsbärande signaler i vågledare och antenner*. 2022.
- [Fol09] Gerald Folland. *Fourier Analysis and Its Application*. American Mathematical Society, 2009.
- [Jac62] David Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, 1962.
- [Nor] Martin Norgren. *Kompendium i elektromagnetisk fältteori, 2H1250*. Avdelningen för teoretisk elektroteknik, Alfvénlaboratoriet, KTH.
- [Che89] David Cheng. *Field and Wave Electromagnetics*. Addison-Wesley, 1989.
- [Fur22c] Anders Furufors. *Matematisk introduktion*. 2022.
- [Hec15] Eugene Hecht. *Optics*. Pearson, 2015.
- [al01] Eriksson et al. *Fysikens matematiska metoder*. KTH, 2001.
- [Agr97] Govind Agrawal. *Fiber-Optic Communication Systems*. Wiley, 1997.
- [Col92] Robert Collin. *Field Theory of Guided Waves*. McGraw-Hill, 1992.