

Kvantinformatik

Del I: Kvantfysikens principer

Anders

16 juli 2022 (18:28)

Sammanfattning

Häri beskrivs kvantfysikens principer, sådan som de formellt brukar beskrivas och tolkas enligt Köpenhamnsskolan.

Innehåll

Innehåll	1
0 Inledning	3
1 Avgränsningar	3
2 Förberedande frågor	3
2.0 Realism	3
2.1 Determinism	3
2.2 Kausalitet	3
2.3 Lokalitet	4
2.4 Reversibilitet	4
2.5 Dolda variabler	4
3 Tillståndsrum och tillstånd	4
3.0 Vektorer i hilbertrum	4
3.1 Norm av och inre produkt mellan tillstånd	5
3.2 Dualrummet	6
4 Fysikalisk tolkning av kvantfysik	6
4.0 Tankeexperiment med en söt katt	6
4.1 Sannolikhet, Borns regel och Bohrs tolkning	8
4.2 \propto Utveckling av kvanttillstånd	10
5 Paus	11
6 Observabler och operatorer	12
6.0 Projektion med vår inre produkt, basbyten	12
6.1 Operatorer för observabler	13
6.1.0 Adjungerade operatorer och reella egenvärden	14
6.2 Flera observabler för ett system, kommutativitet och komplementaritet	14
6.2.0 Mätning av rörelsemängd och hastighet	14
6.2.1 Kommutativitet	16
6.2.2 Mätning av hastighet och position	16
6.2.3 \propto Onoggrannhetsrelationen	18
6.3 \propto Kontinuitetsgränsen och vågfunktionen	18
7 En till paus	19
8 Sammansatta tillstånd	20
8.0 Tensorprodukt mellan hilbertrum	20
8.1 Produkttillstånd	21
8.2 Sammanflätade tillstånd	21
8.3 Sammansatta operatorer	22
9 En sista paus	22

10 Praktiskt exempel: polarisation av fotoner	22
10.0 Beskrivning av fotoner genom polarisationsfilter	23
10.1 En foton igenom flera filter	24
10.2 Sammanflätade fotoner genom var sitt filter	25
11 Utblick	28
A Notation och definitioner	29
B Förkunskaper	29
B.0 Naturfilosofi	29
B.1 Matematik	29
C Vidare läsning	30
Referenser	30

0 Inledning

Denna artikel tjänar som en förberedelse inför [Fur22a] och [Fur22b].

Kvantfysik är en modell för att göra förutsägelser och förklara observationer av verkligheten. Som sådan är kvantfysiken mycket användbar på små skalor, men blir svårhanterlig på makroskopisk nivå och förenklingar och diverse antaganden måste göras.

1 Avgränsningar

Kvantmekanik kommer inte beröras mer än nödvändigt, inte heller relativistiska effekter eller krökt rumtid. Kvantfältteori eller än mer exotiska teorier kommer inte beröras alls.

Vad som främst behandlas är det grundläggande sättet att tänka som skiljer sig från klassisk fysik såväl som några tankar om tolkning av kvantfysiken.

Exemplen som presenteras är utvalda för att belysa den underliggande teorin samtidigt som de är så matematiskt okrävande de kan vara utan att ta för mycket ifrån modellen.

2 Förberedande frågor

Innan vi börjar räkna på saker är det på sin plats att vi ifrågasätter vissa antaganden som vi som så ofta har tagit för givna inom klassisk fysik såväl som några inriktningar som man kan ha i huvudet när man studerar kvantfysik.

2.0 Realism

Världen, eller kanske lättare att föreställa sig, ett begränsat system, befinner sig i ett tillstånd och detta kan beskrivas med variabler för de ingående storheterna så som positioner, hastigheter, elektriska laddningar, magnetisk fältstyrka &sv. Oavsett vår kunskap om systemet så är det så. Denna inriktning kallas *realism*.

2.1 Determinism

Resultatet av en mätning bestäms av systemets tillstånd i händelsen och är därför entydigt och förutsägbart. Med denna inriktning, som kallas *determinism* gäller även det omvända, alltså att det för ett givet tillstånd går att räkna bakåt i tiden på ett entydigt sätt.

2.2 Kausalitet

Kausalitet innebär att vissa händelser är tidsordnade sådana att den ena händelsen kan påverka den andra men inte tvärt om. Detta kallas *kausalitet*,

orsak och verkan. Man kan även tänka sig två händelser som inte är tidsordnade och därför inte kan påverka varandra åt endera håll. Inom relativitetsteorin beskrivs detta med framtida och förflutna ljuskoner för varje händelse.

2.3 Lokalitet

Ett till kausalitet närliggande begrepp är *lokalitet*. Lokalitet är en inriktning i vilken man menar att händelser bara kan ha inverkan på andra händelser som ligger tillräckligt nära.

2.4 Reversibilitet

Om fysikens lagar fungerar likadant oavsett om man låter tiden röra sig framåt eller bakåt kallas de *reversibla*. Vissa processer är skenbart irreversibla, så som termodynamik, där vi ofta lär oss att entropi aldrig minskar. Ser vi till teorin så är det inte sant utan ett resultat som fås då vi går från mikroskopisk till makroskopisk nivå.

2.5 Dolda variabler

Om man vid en mätning, så som determinismen föreslår, känner till, vad man anser vara, allt om tillståndet vid mätningens händelse men ändå inte kan förutsäga resultatet så är ju en rimlig förklaring att det skulle ingå variabler i systemet som man inte känner till. Dessa brukar kallas för *dolda variabler*. John Bell visade att kvantmekaniken, så som den vanligen formuleras, inte tillåter lokala dolda variabler (Bells olikheter), men det finns ännu inget som utesluter teorier med globala dolda variabler.

3 Tillståndsrum och tillstånd

Inom kvantfysiken beskrivs fysikaliska system i termer av vektorer som kallas för *tillstånd*. Dessa är element ur vektorrum som kallas för *tillståndsrum*. Rent matematiskt beskrivs vektorstrukturen som *hilbertrum* (skrivs vanligen som \mathcal{H}) över en kropp som består av \mathbb{C} med tillhörande operationer.

3.0 Vektorer i hilbertrum

Ja, jag inser att jag alldeles nyss (inte nödvändigtvis som i tid, men några rader uppåt i artikeln) lovade att inte bli för matematisk, men det kan vara viktigt att förstå på ett ungefär vad för objekt vi sysslar med.

Ett hilbertrum är ett vektorrum, som alltså tillsammans med sina operationer uppfyller de åtta (eller tio) egenskaperna. Låt oss först etablera operationerna. Vi kommer bara att röra oss i hilbertrum med ändlig dimension och kan därför alltid bilda en bas (vi behöver heller inte bry oss om skillnaden mellan hamelbaser och shauderbaser). Låt oss skriva en vektor (som hädanefter lika

gärna kommer kunna refereras till som ett tillstånd), ψ , i vårt hilbertrum av dimension d som:

$$(0) \quad \underbrace{\psi}_{\in \mathcal{H}} = \underbrace{\psi^\mu}_{\in \mathbb{C}} \underbrace{e_\mu}_{\in \mathcal{H}}$$

Där vi har infört något slags bas e_μ . μ kommer vara ett element i $\{0, 1, 2, \dots, d-1\}$ och varje e_μ kommer vara linjärt oberoende från varje annat e_ν . Vi kallar ψ^μ för tillståndets komponenter. Dessa brukar i allmänhet beskrivas som komplexa tal. Vi kan nu skriva addition mellan två tillstånd, ψ och ϕ , som

$$(1) \quad \underbrace{\psi}_{\in \mathcal{H}} + \underbrace{\phi}_{\in \mathcal{H}} = \underbrace{(\psi^\mu + \phi^\mu)}_{\in \mathbb{C}} \underbrace{e_\mu}_{\in \mathcal{H}}$$

och s-multiplikationen som, för något komplext tal, $z \in \mathbb{C}$, som

$$(2) \quad \underbrace{z}_{\in \mathbb{C}} \cdot \underbrace{\psi}_{\in \mathcal{H}} = \underbrace{z \cdot \psi^\mu}_{\in \mathbb{C}} \underbrace{e_\mu}_{\in \mathcal{H}}$$

Nu när vi har etablerat vår vektorstruktur kan vi gå vidare på nästa egenskap som kännetecknar ett hilbertrum. Det ska vara *fullständigt*, vilket definieras som i att varje *cauchyföljd* konvergerar. Vi går inte in närmare på det, utan betraktar det, för våra syften, som att motsatsen hade varit det konstiga.

3.1 Norm av och inre produkt mellan tillstånd

Vidare måste rummet ha en *norm*. En norm kan användas för att ge ett reellt skalärt värde till varje vektor som kan användas för att beskriva vektorns *längd*. Längd är inte ett jätteanvändbart uttryck i dessa sammanhang eftersom vi inte sysslar med geometri. Vi kommer använda normen till andra saker. Normen av ett tillstånd, ψ , skrivs som

$$(3) \quad \|\psi\| \in \mathbb{R}$$

och den uppfyller tre egenskaper:

0. Triangelolikheten: $\|\psi + \phi\| \leq \|\psi\| + \|\phi\|$
1. Homogenitet: $\|z \cdot \psi\| = |z| \cdot \|\psi\|$
2. Positiv definitivitet: $\|\psi\| = 0$ endast om $\psi^\mu = 0$, annars gäller $\|\psi\| > 0$

där $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$. Vår norm kommer induceras av en speciell *seskvilinjär inre produkt*. Denna inre produkt kommer även definiera vårt dualrum. Denna inre produkt (som givetvis uppfyller *Cauchy-Schwarz olikhet*) definieras som

$$(4) \quad \langle \psi, \phi \rangle = \psi^\mu \overline{\phi^\mu} \in \mathbb{C}$$

och är alltså en skalär. Seskvilinjäriteten kan tydas som att den är linjär i sitt första argument, men multiplicerar vi in en skalär i det andra argumentet måste vi komplexkonjugera. Vidare har vi att $\langle \psi, \phi \rangle = \overline{\langle \phi, \psi \rangle}$.

Nu är vi redo att definiera vår norm som

$$(5) \quad \begin{aligned} \|\psi\|^2 &= \langle \psi, \psi \rangle \\ &= \psi^\mu \overline{\psi^\mu} \\ &= |\psi^\mu|^2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Detta kan vi använda för att alltid normera tillstånd, vilket vi så småningom kommer se gör livet lättare.

3.2 Dualrummet

Som tidigare nämnt kan vi också använda denna inre produkt för att definiera dualrummet, \mathcal{H}^* , som givetvis är av samma dimension. Dualen till ett tillstånd, ψ , skrivs som ψ^* och definieras som:

$$(6) \quad \underbrace{\langle \cdot, \psi \rangle}_{\in \mathcal{H}^*} = \underbrace{\psi_\mu^*}_{\in \mathbb{C}} \underbrace{\epsilon^\mu}_{\in \mathcal{H}^*}$$

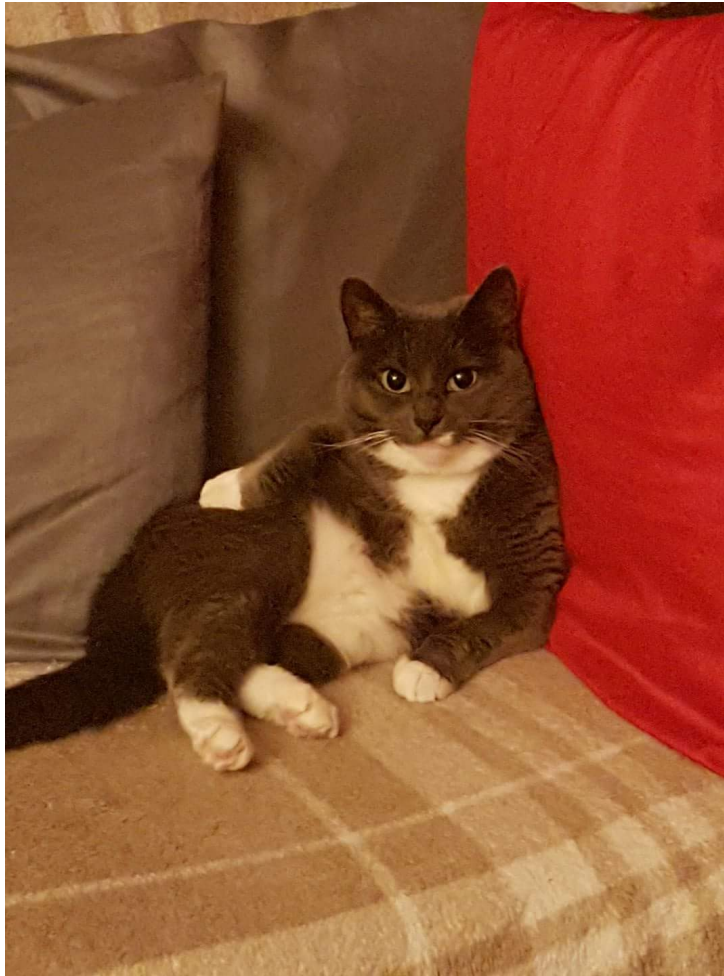
Där vi passat på att införa dualbasen, ϵ för \mathcal{H}^* .

4 Fysikalisk tolkning av kvantfysik

Nu är en del av matematiken avklarad, men vi har ännu inte skaffat oss någon tolkning av dessa abstrakta vektorobjekt som vi kallar för tillstånd i dessa abstrakta hilbertrum som vi kallar för tillståndsrum.

4.0 Tankeexperiment med en söt katt

Låt oss tänka oss ett mycket simpelt fysikaliskt system som består av en söt katt i en låda (nej, jag lovar att jag inte kommer förgifta katten med något slags gas som släpps ut beroende av någon radioaktiv klump) som kan vara antingen



Figur 0: Så här skulle ett offer för vårt experiment kanske kunna tänkas se ut.

hungrig eller mätt. Om den är hungrig kommer den att jama, och om den är mätt kommer den att sova. Vi vet på förhand att en matad katt blir hungrig så småningom, men vi kan inte riktigt med säkerhet avgöra när den kommer att bli så hungrig att den slutar att sova och börjar att jama. Enligt kvantfysiken skulle vi kunna beskriva denna katt (som alltså bara har en egenskap, hunger, och inte alla de egenskaper vi vanligtvis tänker oss att en katt har för det vore alldeles för svårt) med ett tillstånd i ett tvådimensionellt hilbertrum. Låt oss kalla kattens tillstånd för ψ (en, bland naturfilosofer, vanlig bokstav att välja för kvanttillstånd).

Låt oss nu tänka att vi precis (definierat som alldeles nyss, alltså med andra ord att väldigt litet tid har gått sen vi utförde handlingen) matat katten och den har somnat. Då borde vi kunna beskriva katten med tillståndet $\psi_{(m)}$, där m står för mätt. Om vi sen väntar tills katten börjar jama så kan vi beskriva det tillståndet med $\psi_{(h)}$, där h står för hungrig.

Nu är det på sin plats att vi ställer oss en viktig fråga. Kan katten vara både hungrig och mätt samtidigt? Svaret är uppenbarligen nej. Vi betraktar vår söta lilla katt och ser att den **antingen** sover **eller** jamar. Den (vi förutsätter att den inte jamar i sömnen) gör alltså aldrig båda **samtidigt**.

4.1 Sannolikhet, Borns regel och Bohrs tolkning

Vi måste kunna utnyttja detta på något sätt. Vi har hittat två tillstånd som beskriver situationer som aldrig kan hända samtidigt. Med en viss tolkning av kvantfysiken, som vi kommer komma till alldeles straxt, kommer vi inse att de två tillstånden spänner upp hela tillståndsrummet. Med andra ord är de linjärt oberoende. Eftersom de är linjärt oberoende och lika många som rummets dimension så bildar de en bas. Låt oss för stunden ta till oss dem som en bas och se vad som händer.

Vilken är då denna tolkning? Jo den kallas Borns regel och beskriver förhållandet mellan ett tillstånd och sannolikheten att en *observatör* observerar en viss utkomst vid en mätning.

Borns regel kopplar, precis som vi i förväg gjorde i ett stycke en bit tidigare, vissa tillstånd till vissa mätutfall, och ser att dessa bildar en bas, e_μ . Vi kan alltså skriva ϕ som $\phi^\mu e_\mu$. I vårt fall med kattens hunger $\psi = \psi^m e_m + \psi^h e_h$. Sannolikheten att vid en mätning få tillståndet som här fått numret α är alltså \mathcal{P}_α och räknas ut enligt:

$$(7) \quad \mathcal{P}_\alpha = \frac{\langle \phi^\alpha e_\alpha, \phi^\alpha e_\alpha \rangle}{\|\phi\|^2}$$

Notera att $\mathcal{P}_\alpha \in \mathbb{R}$ och $\mathcal{P}_\alpha \leq 1$. Här ser vi alltså att om vi normerar våra tillstånd får vi ett enklare uttryck så låt oss hädanefter alltid göra det (och likaledes för dualbaser, sådant att $e^\nu e_\mu = \delta_\mu^\nu$):

$$(8) \quad \mathcal{P}_\alpha = \langle \phi^\alpha e_\alpha, \phi^\alpha e_\alpha \rangle = |\phi^\alpha|^2$$

Låt oss nu tillämpa detta på vår katt i tre olika tillstånd. Matad, hungrig och obestämd. Vi skriver vår bas som $e_m = \psi_{(m)}$ och $e_h = \psi_{(h)}$. Allmänt kan vi i vår bas skriva tillståndet som $\psi = \psi^m e_m + \psi^h e_h$ (notera här att $\psi_\mu \in \mathcal{H}$ medan $\psi^\mu \in \mathbb{C}$). För en matad katt har vi $\psi = 1 \cdot e_m + 0 \cdot e_h$. Vi förväntar oss att få $\mathcal{P}_m = 1$ och $\mathcal{P}_h = 0$. Låt oss testa.

$$(9) \quad \mathcal{P}_m = \langle e_m, e_m \rangle = \|e_m\|^2 = 1$$

Korrekt alltså. Vi har även att

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_h &= \langle 0, 0 \rangle \\
 (10) \quad &= \|0\|^2 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

På samma sätt kan vi för en hungrig katt, som alltså beskrivs av tillståndet $\psi = 0 \cdot e_m + 1 \cdot e_h$. Detta ger, som förväntat:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_m &= \langle 0, 0 \rangle \\
 (11) \quad &= \|0\|^2 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_h &= \langle e_h, e_h \rangle \\
 (12) \quad &= \|e_h\|^2 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Vilket stämmer med vad vi föreställde oss.

Låt oss nu göra det mer intressant genom att mata katten så att den somnar, lägga den i en låda och vänta en stund (hur länge är inte viktigt för resonemanget egentligen). Vad är sannolikheterna att vi, när vi lyfter på lådans lock, ser en sovande katt? Vi gör här antagandet att katten inte avlidit så vi har $\mathcal{P}_m + \mathcal{P}_h = 1$. Vi kan beskriva vårt kvanttillstånd som $\psi = a^m \cdot e_m + a^h \cdot e_h$. Detta ger sannolikheterna:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_m &= \langle a^m e_m, a^m e_m \rangle \\
 (13) \quad &= \|a^m e_m\|^2 \\
 &= |a^m|^2
 \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_h &= \langle a^h e_h, a^h e_h \rangle \\
 (14) \quad &= \|a^h e_h\|^2 \\
 &= |a^h|^2
 \end{aligned}$$

Vi noterar här att vi normerade våra vektorer i förväg och därför såklart har $\mathcal{P}_m + \mathcal{P}_h = |a^m|^2 + |a^h|^2 = 1$ precis som förväntat. Vad förväntade vi oss

angående de enskilda värdena för \mathcal{P}_m och \mathcal{P}_h ? Jo man kan ju tänka sig att katten blir hungrig efter ett tag, så de borde nog båda vara nollskilda i alla fall.

Bohrs tolkning av hela det här är följande: Ett kvanttillstånd är en linjärkombination av, av varandra linjärt oberoende, tillstånd, som vid en observation *kollapsar* till ett *egentillstånd* för en mätning, som alltså motsvarar det värde som uppmättes (notera dock att vi kan ha degeneration sådant att förhållandet inte längre är bijektivt utan att ett mätvärde kan svara mot flera egentillstånd. Varje egentillstånd motsvarar alltså alltid exakt ett mätvärde). Denna tolkning kallas ibland för *köpenhamnstolkningen* och är den vanliga att ta till sig när man vill få något gjort, alltså räkna ut något.

Sammanfattningsvis kan vi säga att kattens tillstånd förändras i lådan. Från att ha varit helt i egentillståndet (det vi tidigare använde som bas, termerna bas och egentillstånd kommer användas på ett sätt som gör dem utbytbara) $\psi_{(m)}$ ändrades den med tiden till att vara i en linjärkombination av tillstånden $\psi_{(m)}$ och $\psi_{(h)}$. Koefficienterna i denna linjärkombination beskrev alltså sannolikheterna att mötas av en sovande respektive en jamande katt då vi öppnade på locket.

Vid öppnandet av locket möttes vi ju av en katt som antingen sov eller jamade och då kollapsade (ändrade) sig tillståndet till motsvarande egentillstånd. En mätning precis efter det borde ju svara mot något av de första två av våra experiment, alltså mätning av en uppenbart sovande eller en uppenbart jamande katt. Ingenting konstigt alls så här långt alltså!

För att beskriva hur ett tillstånd ändras i tid (eller rum för den delen) krävs en hel del. Vi kommer inte gå in särskilt mycket på det eftersom det inte behövs för våra ändamål, men för att väcka litet inom er kan man ju bjuda på några smakprov.

4.2 \propto Utveckling av kvanttillstånd

Utvecklingen av kvanttillstånd kan förklaras genom basvektorer för en Lie-algebra som alltså genererar en Lie-grupp. Bohr beskrev detta i termer av vad han kallade *komplementaritet* eller *dualitet*. De duala storheterna är exempelvis tid och energi, position och rörelsemängd eller rotationsorientering och rörelsemängdsmoment.

Tidsutvecklingen av ett tillstånd, ψ , beskrivs enligt (klassiskt) Schrödingers ekvation:

$$(15) \quad \partial_t \psi = -i\mathcal{H}\psi$$

Där \mathcal{H} kallas *hamiltonoperatoren* och beskriver systemets energi. Man kan lockas att omedelbart skriva någon form av "lösning" till ekvationen på formen $\psi = c_0 + c_1 e^{-i\mathcal{H}t}$, men det är inte ens väldefinierat vad en operator i en exponent innebär (protip: taylorutveckling kommer inte leda någonstans trots att många

ingenjörer skulle peka ditåt) utan för att skriva en vettig lösning får vi gå till Neumann-integraler (men det gör vi inte här, utan vill ni se sånt får ni plugga matematisk eller konstruktiv kvantfältteori).

På samma sätt kan en rörelsemängdsoperator (som egentligen består av olika), \mathcal{P}^μ , användas för att generera rumslig derivata. Sätter vi ihop dem till en fyrdimensionell rörelsemängdsoperator ($\mathcal{P}^0 = \mathcal{H}$) får vi de fyra ekvationerna:

$$(16) \quad \partial_\mu \psi = -i\mathcal{P}^\mu \psi$$

Vi kan tänka oss att den kinetiska energin för en massiv partikel är proportionell mot rörelsemängden i kvadrat, och \mathcal{H} kommer således innehålla termer av andra ordningen. Detta känns ju inte bra. En relativistisk variant, som utgår från Einsteins berömda ekvation:

$$(17) \quad p^\mu p_\mu = m^2$$

Leder oss till ekvationen

$$(18) \quad (\partial_\mu \partial^\mu - m^2)\psi = 0$$

Vilket för tankarna till vågrörelser. Schrödinger själv beskrev gärna kvantmekaniken i termer av vågor.

Tar man hänsyn till partiklars spinn får man ekvationer på formen

$$(19) \quad (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

Där γ^μ är fyra operatorer som genererar Clifford-algebran $Cl_{1,3}(\mathbb{R})$. Nu börjar vi emellertid komma in på saker som är långt långt bortom den här artikelns syfte.

5 Paus

Det är förmodligen nödvändigt att ta det litet lugnt och blicka tillbaka en stund nu innan vi fortsätter.

Vi har nu byggt upp ett grundläggande matematiskt ramverk, där vi beskriver fysikaliska system som vektorer i hilbertrum. Vi kan beskriva dem i termer av normerade egentillstånd, som bildar en bas. Vi kan använda Borns regel för att

räkna ut sannolikheten för varje utfall för en mätning. Vi förstår att systemet efter en mätning alltid befinner sig i det egentillstånd som svarar mot utfallet för mätningen.

Härifrån kan vi gå två vägar. Vi kan fundera på vad som händer om vi betraktar ett system som består av flera delsystem. Vi kan också fundera på vad som händer om vi är intresserade av olika aspekter av ett enskilt system.

Vi börjar med att fundera på det senare. En katt har ju trots allt fler egenskaper än sin hunger. Exempelvis borde vi kunna beskriva riktningen på dess svans, fuktigheten av dess päls &sv.

6 Observabler och operatorer

Storheter som kan mätas kallas för *observabler*. En mätning av en observabel resulterar alltid i en reell skalär (vissa storheter är *diskreta* och mätningar kan då resultera i element ur någon ännu mer restriktiv, *uppräknelig*, mängd).

Ett fysikaliskt system kan ha, och har i allmänhet, många observabler. Tänker vi oss en liten sten i rymden så har vi exempelvis position, rörelsemängd och massa. Kanske har vi även rörelsemängdsmoment och elektrisk laddning. Kanske fler än så. Innan vi ger oss in på att betrakta fler observabler kanske vi borde ifrågasätta vårt tidigare val av bas.

6.0 Projektion med vår inre produkt, basbyten

Låt oss nu fundera på vår söta katt igen. Observabeln mätnad gav upphov till ett tvådimensionellt tillståndrum, \mathcal{H} . Vi kunde sen dela upp detta rum i två underrum, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_h \oplus \mathcal{H}_m$, med tillhörande egentillstånd. Fanns det något funamentalt med denna uppdelning, och därmed val av bas? Det borde ju inte finnas något egentligen fundamentalt, på en representativ nivå, med ett val av bas. Vårt val av bas var praktiskt för uppgiften, men det var inte meningsfullt rent funamentalt. Låt oss undersöka vad som hade hänt om vi hade valt en annan bas, e'_μ .

En alternativ bas hade kunnat vara $e'_0 = e_h + e_m$ och $e'_1 = e_m$. Vi får normera så vi inte behöver krångla, så vi skriver om den första som $e'_0 = \frac{(e_h + e_m)}{\sqrt{2}}$. Vad vi borde tänka på nu är hur Borns regel ser ut i termer av den här nya basen.

Vad man då får göra är att projicera tillståndet uttryckt i den nya basen på den bas som svarade mot våra egentillstånd. Detta kan göras med hjälp av vår inre produkt. Vår katt är i tillståndet (i vår nya bas, e' respektive vår gamla bas, e) $\psi = b^0 e'_0 + b^1 e'_1 = a^m e_m + a^h e_h$. En sådan projektion skriver vi på formen:

$$\begin{aligned} (20) \quad a^\mu &= \langle b^0 e'_0 + b^1 e'_1, e_\mu \rangle \\ &= e^\mu (b^0 e'_0 + b^1 e'_1) \end{aligned}$$

Och därifrån får vi våra nya koefficienter. Det är alltså egentligen ingenting annat än en basbytestensor. Rent allmänt kan vi skriva:

$$(21) \quad \begin{aligned} \psi &= (b^0 e'_0 + b^1 e'_1, e_\mu) e_\mu \\ &= a^\mu e_\mu \end{aligned}$$

Vi kan skriva denna projektionsoperator som $\epsilon^\mu \otimes e_\mu \in \mathcal{H}^* \otimes \mathcal{H}$, alltså en (1,1)-tensor. I vårt fall kommer den första faktorn, alltså kovektorn, äta upp en vektor och spotta ut vår koefficient som hör till den andra faktorn (vi använde tensorn som $\epsilon^\mu \otimes e_\mu : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ men det är såklart inte enda sättet man kan använda den på).

När vi nu har koefficienterna i vår egenbas kan vi räkna ut sannolikheterna precis på samma sätt som vi förut gjorde.

6.1 Operatorer för observabler

Det är inte alltid vi vill mäta något i stil med hungrig och mätt. Ibland vill vi mäta något som har ett värde (en reell skalär), en observabel. Inom kvantmekaniken hör till varje observabel en relaterad *operator*. Det är med avseende på denna som den ovan nämnda egenbasen hör. Egenbasen för en operator är alltså de vektorer som för operatoren är egenvektorer.

En operator, $\mathcal{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, för en observabel har som uppgift att projicera ett tillstånd på observabelns tillhörande egentillstånd, viktade med motsvarande mätvärde, λ . Vi kan se här att ett tillstånd som är ett egentillstånd för en observabel kommer bevara sin "riktning" efter projektion, och således enbart skalas om. För ett tillstånd $\psi = e_\alpha$ som alltså är en basvektor för egenbasen som associeras med observabeln har vi:

$$(22) \quad \mathcal{A}\psi = \lambda_\alpha \psi$$

Vi ser här att mätvärdet är ett *egenvärde* för operatoren. För ett allmänt tillstånd uttryckt i egenbasen (har vi det inte i egenbasen kan vi hitta koefficienterna med projektionsförfarandet som beskrivs ovan), $\psi = \psi^\mu e_\mu$, har vi:

$$(23) \quad \mathcal{A}\psi = \lambda_\mu \psi^\mu e_\mu$$

Ifrån detta uttryck är steget inte långt från att använda Borns regel för att skaffa oss ett *förväntansvärde* (av matematiker ofta slarvigt kallat för *väntevärde*), $\mathcal{E}[\mathcal{A}]$, för en mätning av den observabel som motsvaras av operatoren \mathcal{A} . Låt oss göra det:

$$\begin{aligned}
(24) \quad & \mathcal{E}[\mathcal{A}] = \langle \mathcal{A} \psi, \psi \rangle \\
(25) \quad & = \psi_\mu^* \epsilon^\mu \mathcal{A} \psi^\mu e_\mu \\
(26) \quad & = \lambda_\mu \epsilon^\mu \psi^\mu e_\mu \\
(27) \quad & = \lambda_\mu |\psi^\mu|^2
\end{aligned}$$

Äntligen kan kvantfysiken göra något vettigt! Det är, hursomhelst, inte triviellt att finna \mathcal{A} för vår observabel.

6.1.0 Adjungerade operatorer och reella egenvärden

Som tidigare nämnt måste egenvärdena, alltså de mätvärden vi får vid en mätning, vara reella skalärer. De kan inte vara komplexa. För att en operator ska ha reella egenvärden behöver den vara *självadjungerad*, vilket innebär att den uppfyller vissa villkor i förhållande till sin *adjungerade operator*. Ibland kallas detta även att operatoren är *hermitesk* eller *hermitisk* med avseende på sitt *Hermite-konjugat*. Det är oavsett samma sak. Vad är då en adjungerad operator? För en operator, $\mathcal{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, har vi en adjungerad operator $\mathcal{A}^\dagger : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ enligt ekvationen:

$$(28) \quad \langle \mathcal{A} \psi, \phi \rangle = \langle \psi, \mathcal{A}^\dagger \phi \rangle$$

Om \mathcal{A} är självadjungerad så innebär det att $\mathcal{A} = \mathcal{A}^\dagger$. Vi har även att $(\mathcal{A}^\dagger)^\dagger = \mathcal{A}$ under alla omständigheter. Vi har alltså att varje observabel är relaterad till en självadjungerad operator.

6.2 Flera observabler för ett system, kommutativitet och komplementaritet

En sak vi inte har talat om än, men som är av central betydelse, i och med att det utgör en av de tydligaste skillnaderna mellan kvant- och vanlig fysik, för kvantmekaniken, nämligen system med flera observabler.

Låt oss betrakta tre observabler: position, hastighet och rörelsemängd som motsvaras av operatorerna \mathcal{X} , \mathcal{V} och \mathcal{P} . Vi börjar med de senare två. Vi tar fram vår katt i lådan igen, men glömmer huruvida den är hungrig eller mätt. I stället ska vi mäta dess hastighet och rörelsemängd. Eftersom vi inte kommer att gå in på kvantmekanik (denna artikel är ämnad att lägga en stabil grund för kvantfysik i allmänhet, inte kvantmekanik) ska vi göra det enkelt.

6.2.0 Mätning av rörelsemängd och hastighet

Vår katt kan springa i tre olika hastigheter, 0, 1 eller 2 kilometer per timme. Låt oss kalla egentillstånden som motsvarar dessa tre mätvärden för v_0 , v_1 och v_2 (dessa är en bas). På samma sätt kan katten ha rörelsemängderna 0, 5 eller

10 kilogramkilometer per timme. Låt oss kalla egentillstånden som motsvarar dessa tre mätvärden för p_0 , p_5 och p_{10} .

Nu lägger vi katten i lådan, tillsluter locket och skakar om lådan i en minut, så att katten beskrivs av tillståndet (utvecklingen från att vi lade in katten till att vi har skakat lådan i en minut kommer vi inte kunna beskriva för det finns inga ordentliga modeller för hur katter beter sig i lådor) $\psi = a^0 v_0 + a^1 v_1 + a^2 v_2 = b^0 p_0 + b^5 p_5 + b^{10} p_{10}$ i våra två baser.

Beräknar vi nu förväntansvärdet för hastigheten för katten får vi:

$$(29) \quad \mathcal{E}[\mathcal{V}] = 0 \cdot |a^0|^2 + 1 \cdot |a^1|^2 + 2 \cdot |a^2|^2$$

När vi mäter kommer vi i allmänhet inte få förväntansvärdet (ett förväntansvärde behöver ju inte ens ligga i utfallsrummet, alltså det behöver inte sammanfalla med ett egenvärde för operatoren), utan vi kommer mäta hastigheten till 0 kilometer i timmen med sannolikheten $|a^0|^2$, och på samma sätt kommer sannolikheten att vi mäter hastigheten till 1 kilometer per timme vara $|a^1|^2$. Slutligen kommer vi mäta hastigheten till 2 kilometer per timme vara $|a^2|^2$.

Nu hör det till saken att vi råkar veta att katten väger 5 kilogram. Vi kan då (med den klassiska approximationen att rörelsemängd är hastighet multiplicerat med massa) betrakta mätningen av kattens hastighet som en mätning av kattens rörelsemängd. Vi har ju egentligen mätt samma sak, bara att vi behöver multiplicera egenvärdena med en faktor 5 kilogram. Sannolikheten för att mäta kattens hastighet till ett egenvärde måste alltså vara exakt lika stor som sannolikheten för att mäta kattens rörelsemängd till samma egenvärde fast multiplicerat med en faktor 5. Med andra ord har vi:

$$(30) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}[\mathcal{P}] &= \mathcal{E}[\mathcal{V}] \cdot 5 \\ &= 0 \cdot |a^0|^2 + 5 \cdot |a^1|^2 + 10 \cdot |a^2|^2 \end{aligned}$$

och om vi ställer upp enligt vår rörelsemängdsbas har vi

$$(31) \quad \mathcal{E}[\mathcal{P}] = 0 \cdot |b^0|^2 + 5|b^5|^2 + 10|b^{10}|^2$$

Om vi betraktar sannolikheterna för sig själva inser vi att $a^0 = b^0$, och samma för de andra koefficienterna. Eftersom vi inte gjort något val av ψ så leder resultatet till slutsatsen att baserna är samma. Vi har alltså $v_0 = p_0$ och så vidare.

Det finns ett viktigt resultat i detta som är lätt att missa. När vi lyfter på locket och mäter kattens hastighet kommer kattens tillstånd kollapsa till ett egentillstånd för hastighetsoperatoren med någon sannolikhet. Därefter kan vi mäta

rörelsemängden, men vi är ju redan i ett egentillstånd för den eftersom både hastighet och rörelsemängd hade samma egenbas. Alltså blir rörelsemängdsmätningen, om den sker omedelbart efteråt alltid den rörelsemängd som motsvarar den uppmätta hastigheten. På samma sätt kan vi göra tvärt om och mäta rörelsemängden först och hastigheten senare. Oavsett vilken vi väljer först kommer vi få samma sannolikhetsfördelning för egentillstånden och eftersom de delar egenbas så kommer det inte spela någon roll vilken vi mäter först.

6.2.1 Kommutativitet

Rent matematiskt kan vi beskriva detta i termer av något vi kallar för *kommutator*. Vi definierar en kommutator för två operatorer \mathcal{A} och \mathcal{B} som $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ enligt:

$$(32) \quad [\mathcal{A}, \mathcal{B}]\psi = (\mathcal{A} \circ \mathcal{B} - \mathcal{B} \circ \mathcal{A})\psi$$

Två operatorer sägs *kommutera* om deras kommutator är 0. Varje operator kommuterar med sig själv, vilket lätt kan inses med att kommutatorn är antisymmetrisk i sina argument, $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = -[\mathcal{B}, \mathcal{A}]$.

Kommutatorn för hastighet och rörelsemängd är alltså noll. De kommuterar. $[\mathcal{V}, \mathcal{P}] = [\mathcal{P}, \mathcal{V}] = 0$. Det spelar ingen roll vilken av dem vi mäter först.

6.2.2 Mätning av hastighet och position

Om vi i stället för rörelsemängd och hastighet, vars klassiska skillnad bara är multiplikation med en konstant och kanske känd massa, mäter hastighet och position. Mellan dem finns inget sådant förhållande. Vi kan för enkelhetens skull säga att katten kan befinna sig på tre olika positioner: 0, 2 och 4 centimeter ifrån lådans norra innervägg. Låt dessa tre egenvärden svara mot tre egentillstånd som bildar en bas, x_0 , x_2 och x_4 . Kattens tillstånd kan vi i denna bas skriva som $\psi = c^0 x_0 + c^2 x_2 + c^4 x_4$.

I vanlig ordning kan vi skriva förväntansvärdet för avståndet mellan katten och lådan norra kant enligt:

$$(33) \quad \mathcal{E}[\mathcal{X}] = 0 \cdot |c^0|^2 + 2 \cdot |c^2|^2 + 4 \cdot |c^4|^2$$

Inget konstigt alls så här långt. Låt oss säga att vi vid en mätning, med sannolikheten $|c^2|^2$, mäter kattens position till 2 centimeter ifrån lådans norra kant. Kattens tillstånd är nu x_2 , alltså egentillståndet som svarar mot det mätresultatet. Vill vi nu omedelbart mäta hastigheten också så måste vi projicera det egentillståndet på egenbasen som svarar mot hastighetsoperatorn.

Vi har ingen anledning att tro att dessa två egenbaser sammanfaller på samma sätt som de gjorde för hastighet och rörelsemängd. Låt deras förhållande i stället

vara på ett annat sätt som gör det någorlunda enkelt att räkna. $x_0 = \frac{v_0+v_1}{\sqrt{2}}$,
 $x_1 = \frac{v_1+v_2}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{v_2+v_0}{\sqrt{2}}$.

Egentillståndet vi erhöll vid vår positionsmätning av katten var alltså $\psi = x_2 = \frac{v_2+v_0}{\sqrt{2}}$. En projektion på egenbasen för hastighetsoperatoren blir enkel. Vi får koefficienter sådana att $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}v_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}v_0$.

Det innebär alltså att då katten är 2 centimeter från lådans norra kant så kan den bara ha hastigheterna 0 eller 2 kilometer per timme. Vidare kommer sannolikheterna för att vid en omedelbar mätning av hastigheten vara $\frac{1}{\sqrt{2}}^2 = \frac{1}{2}$ för att få resultatet 0 och $\frac{1}{2}$ för att få 2 kilometer per timme.

Låt oss säga att vi mäter hastigheten till 2 kilometer per timme. I egenbasen för position kommer vi kunna skriva om tillståndet enligt $\psi = v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2$. Vi har alltså sannolikheten $\frac{1}{2}$ att omedelbart efter vår hastighetsmätning mäta katten till positionen 0 centimeter ifrån lådans norra kant.

Sammanfattningsvis kan vi säga att med ovan förhållande mellan egenbaserna kan vi mäta positionen, sen hastigheten, sen positionen igen och det är möjligt att vi får resultaten 2 centimeter, 2 kilometer per timm och slutligen 0 centimeter.

Är det möjligt att vi skulle kunnat kasta om ordningen av våra mätningar och ändå ha exakt samma sannolikheter för att mäta just de värdena. Säg att vi mätte positionen först, sen positionen igen och slutligen hastigheten.

Vi betraktar den omkastade mätordningen. Den första positionsmätningen måste ha samma sannolikhetsfördelning i båda fallen, så där kan vi inte ha någon skillnad. Tar vi sen och mäter positionen igen så är ju tillståndet redan i ett egentillstånd, och vi måste därför få samma värde igen. Fick vi 0 centimeter vid första mätningen så måste vi vid en omedelbart efterföljande positionsmätning också få resultatet 0 cm. Därifrån kommer en hastighetsmätning ha samma sannolikhetsfördelning som i det första fallet.

Vi kan notera en viktig och uppenbar skillnad. I det omkastade fallet kan vi inte få olika mätresultat vid positionsmätningarna, men det kunde vi med den första ordningen. Rent matematiskt kan vi alltså ställa upp olikheten

$$(34) \quad \mathcal{X} \circ \mathcal{V} \circ \mathcal{X} \neq \mathcal{X} \circ \mathcal{X} \circ \mathcal{V}$$

Vilket leder till slutsatsen

$$(35) \quad [\mathcal{X}, \mathcal{V}] = \mathcal{X} \circ \mathcal{V} - \mathcal{V} \circ \mathcal{X} \neq 0$$

Hastighetsoperatoren och positionsoperatoren kommuterar alltså inte och det spelar därmed roll vilken av dem vi mäter först. De delar inte egenbas.

Rent fysikaliskt kan vi tänka oss att vi vid en mätning alltid måste förändra systemet vi mäter på. Vi påverkar kattens position när vi mäter dess hastighet och dess hastighet när vi mäter dess position. Detta är egentligen ingenting anmärkningsvärt, men det är inte heller något man alls tar hänsyn till inom den klassiska fysiken.

6.2.3 \propto Onogrannhetsrelationen

För storheter vars operatorer inte kommuterar har vi en relation som sätter en undre gräns för onogrannheten för förväntansvärdena vid en omkastning av mätordningen. Denna brukar uttryckas enligt, för två icke kommuterande operatorer, \mathcal{A} och \mathcal{B} :

$$(36) \quad \sigma_{\mathcal{A}}\sigma_{\mathcal{B}} \geq k$$

Där $\sigma_{\mathcal{A}}$ är roten ur variansen för förväntansvärdet av \mathcal{A} . k är någon konstant med rätt dimension. Det mest kända exemplet brukar kallas för den *kanoniska kommutationsrelationen*:

$$(37) \quad \sigma_{\mathcal{P}}\sigma_{\mathcal{X}} \geq \frac{\hbar}{2}$$

Ibland kallas dessa relationer för *Heisenbergs onogrannhetsrelationer* eller *Heisenbergs osäkerhetsrelationer*.

6.3 \propto Kontinuitetsgränsen och vågfunktionen

Det är inte alla observabler som bara kan befinna sig i en begränsad mängd tillstånd. En sten i rymden kan vi observera i ett kontinuum av positioner och rörelsemängder, för att ta ett exempel. Tillståndet beskrivs då vanligen av en kontinuerlig komplexvärd (egentligen inte komplexvärd utan den beskrivs nog bäst som ett kontinuerligt tvärsnitt över ett fiberknippe men så långt skall vi inte gå här) funktion, $\psi(x)$.

Tolkningen blir då att $\psi(x)$ är sannolikhetstätheten runt punkten x . Det blir inte lika lätt att normera denna funktion, men det går såklart. Vi har förväntansvärdet för positionen enligt

$$(38) \quad \mathcal{E}[\mathcal{X}] = \int x\psi(x)d^3x$$

och ett egentillstånd, säg omedelbart efter mätning av en position som resulterade i positionen ξ , blir

$$(39) \quad \psi(x) = \delta(x - \xi)$$

Vid detta tillstånd måste ju förväntansvärdet för positionen vara exakt ξ , vi sätter in och får

$$(40) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}[\mathcal{X}] &= \int x \delta(x - \xi) d^3x \\ &= \xi \end{aligned}$$

Korrekt! Detta är det vanliga sättet att räkna på kvantmekanik när man sysslar med atomer och molekyler. Vi stannar där och återgår till diskreta tillstånd.

7 En till paus

Nu har vi byggt upp ett, någorlunda, stabilt matematiskt ramverk för att beskriva fysikaliska system i termer av vektorer i vektorrum. Vi kan räkna ut saker och vi har kommit fram till att ordningen av mätningar kan spela roll, eller, ekvivalent, att mätningar påverkar systemet vi mäter.

Vi har inte beskrivit matematiskt hur ett tillstånd utvecklas i tiden, och det kommer vi heller inte att göra

Går vi tillbaka till vårt exempel med mätning av hastighet och position för katten i lådan så satte vi förhållandet mellan egenbasen för positionsoperatoren och hastighetsoperatoren till något givet, vilket var praktiskt för exemplet i det att det gjorde det lätt att räkna, men å andra sidan kändes det inte så verkligt kanske. Kan man räkna ut förhållandet? Låt oss undersöka det!

Vi var tydliga med att lådan skakades i en minut efter att katten placerades där. Låt oss genomföra ett experiment många gånger, i vilket vi placerar katten på en känd plats, skakar lådan i exakt en minut och sen undersöker var den är. Då kan vi, på ett experimentellt sätt, få sannolikheterna för de olika mätvärdena vid en positionsmätning omedelbart efter en minuts skakande. Dessa sannolikheter måste ju vara kompatibla med koefficienterna i kvanttillståndet, och på så sätt har vi räknat ut dem (upp till en *fas*, alltså en komplex faktor med normen 1, som inte kommer påverka mätresultatet).

På samma sätt kan vi genom att för ifrån varje positionsegentillstånd mäta hastigheten få sannolikhetsfördelningen för de olika mätresultaten. Detta ger ju koefficienterna för hastighetsegentillstånden i egenbasen för position. De går alltså att räkna ut. Vidare kan vi räkna ut projektionsoperatoren med dessa, och med denna kan vi skriva hastighetsoperatoren, som ju bara är en projektion på den tillhörande egenbasen viktad med mätvärdena, alltså operators egenvärden.

Någonting vi ännu inte har betraktat är system som vi kan bygga av flera delsystem. Vi bör ställa oss frågan vad som händer om vi lägger två katter i samma låda. Kanske interagerar dem, kanske låter de varandra vara (det finns återigen ingen ordentlig teori för katters beteenden i lådor och jag vägras

forskningsanslag trots att jag kan garantera fantastiska resultat om jag bara får nån miljon kronor eller så).

8 Sammansatta tillstånd

Sammansatta tillstånd består av flera delsystem. Atomer kan exempelvis beskrivas som delsystem bestående av de enskilda elektornerna och kärnan, och kärnan kan vidare delas in i flera nivåer. Hela systemet kan alltid fortfarande beskrivas som *ett* kvanttillstånd. Här kommer dina kunskaper i multilinjär algebra väl till användning!

8.0 Tensorprodukt mellan hilbertrum

Vi börjar med ett system som består av två delsystem. Vill man generalisera vidare kan man göra det med samma formalism. Hilbertrummet som vårt sammansatta tillstånd lever i kan skrivas som en tensorprodukt mellan delsystemens hilbertrum. Låt oss kalla delsystemen a och b , med tillhörande tillståndsrum $\mathcal{H}^{(a)}$ och $\mathcal{H}^{(b)}$:

$$(41) \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}^{(a)} \otimes \mathcal{H}^{(b)}$$

Vi har även, i vanlig ordning:

$$(42) \quad \dim \mathcal{H} = \dim \mathcal{H}^{(a)} \cdot \dim \mathcal{H}^{(b)}$$

Låt oss nu säga att $\dim \mathcal{H}^{(a)} = d^{(a)}$ och $\dim \mathcal{H}^{(b)} = d^{(b)}$, så att $\dim \mathcal{H} = d^{(a)}d^{(b)}$. \mathcal{H} är ju ett linjärt rum precis som tidigare så vi kan ju roa oss med att finna en bas.

Vi tänker oss att vi har baser för a och b i $e_{\mu}^{(a)}$ och $e_{\nu}^{(b)}$ där μ och ν finns i mängderna $\{0, 1, 2, \dots, d^{(a)} - 1\}$ respektive $\{0, 1, 2, \dots, d^{(b)} - 1\}$. Frågan vi nu borde ställa oss är om vi från dessa två baser kan finna $d^{(a)}d^{(b)}$ nya basvektorer som alltså får utgöra bas för \mathcal{H} . Det går att göra på ett uppenbart sätt genom att helt enkelt tensormultiplicera dem, vilket resulterar i exakt så många, linjärt oberoende, vektorer, alltså en bas.

$$(43) \quad e_{\mu\nu} = e_{\mu}^{(a)} \otimes e_{\nu}^{(b)}$$

På exakt samma sätt kan vi ifrån dualbaserna skaffa oss en dualbas för \mathcal{H}^* :

$$(44) \quad \epsilon^{\mu\nu} = \epsilon^{(a)\mu} \otimes \epsilon^{(b)\nu}$$

Dessa två baser kommer såklart uppfylla vårt villkor

$$(45) \quad \epsilon^{\mu\nu} e_{\rho\sigma} = \delta_{\rho}^{\mu} \delta_{\sigma}^{\nu}$$

8.1 Produkttillstånd

Ett specialfall av ett sammansatt tillstånd är de så kallade *produkttillstånden*. Dessa kan skrivas som tensorprodukten mellan två olika tillstånd, $\psi^{(a)} \in \mathcal{H}^{(a)}$ och $\psi^{(b)} \in \mathcal{H}^{(b)}$:

$$(46) \quad \psi = \psi^{(a)} \otimes \psi^{(b)}$$

Om vi skriver dem i sina baser har vi $\psi^{(a)} = \psi^{(a)\mu} e_{\mu}^{(a)}$ och $\psi^{(b)} = \psi^{(b)\nu} e_{\nu}^{(b)}$. Produkttillståndet ψ kommer då i basen vi byggde som tensorprodukter mellan dessa baser kunna skrivas som:

$$(47) \quad \psi = \psi^{(a)\mu} \psi^{(b)\nu} e_{\mu}^{(a)} \otimes e_{\nu}^{(b)}$$

Vi har alltså att koefficienterna är

$$(48) \quad \psi^{\mu\nu} = \psi^{(a)\mu} \psi^{(b)\nu}$$

Rent matematiskt kan vi beskriva ψ som en $(2, 0)$ -tensor, alltså ett objekt som vill käka två kovektorer för att ge tillbaka en skalär. Vidare kan vi notera att denna tensor kan skrivas som tensorprodukten mellan två tillstånd. En sådan tensor kallas *isärtagbar*.

8.2 Sammanflätade tillstånd

Det finns inget som hindrar att ett tillstånd i \mathcal{H} inte kan skrivas som tensorprodukten mellan ett tillstånd i $\mathcal{H}^{(a)}$ och ett tillstånd i $\mathcal{H}^{(b)}$, utan måste skrivas som en summa av flera sådana produkter. En sådan tensor är inte isärtagbar och kallas inom kvantfysiken för *sammanflätad*.

Vi kommer att återvända till sammanflätade tillstånd så småningom eftersom de är särskilt intressanta för våra ändamål.

8.3 Sammansatta operatorer

Två självadjungerade operatorer, $\mathcal{A}^{(a)} : \mathcal{H}^{(a)} \rightarrow \mathcal{H}^{(a)}$ och $\mathcal{A}^{(b)} : \mathcal{H}^{(b)} \rightarrow \mathcal{H}^{(b)}$, för någon observabel, kan användas för att konstruera en självadjungerad operator, $\mathcal{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ enligt:

$$(49) \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}^{(a)} \otimes \mathcal{A}^{(b)}$$

Som verkar på ett produkttillstånd, $\psi = \psi^{(a)} \otimes \psi^{(b)}$ enligt:

$$(50) \quad \mathcal{A}\psi = \mathcal{A}^{(a)}\psi^{(a)} \otimes \mathcal{A}^{(b)}\psi^{(b)}$$

Utifrån det kan linjäritet användas för att utöka till allmäna sammanflätade tillstånd, som ju bara är summor av produkttillstånd.

Ett intressant fall är då observabeln är additiv, exempelvis kommer det totala systemets rörelsemängd vara summan av delsystemens rörelsemängd, så rörelsemängdsoperatoren, \mathcal{P} , kan skrivas som en summa av en operator som lämnar den ena faktorn oförändrad men mäter den andra och en operator som gör tvärt om, alltså:

$$(51) \quad \mathcal{P} = \mathcal{P}^{(a)} \otimes id^{(b)} + id^{(a)} \otimes \mathcal{P}^{(b)}$$

Där $id^{(a)}$ är identitetsoperatoren på $\mathcal{H}^{(a)}$ och motsvarande för b . Identitetsoperatoren är precis som den låter, den förändrar ingenting (för ett allmänt tillstånd ϕ har vi alltid $id\phi = \phi$).

9 En sista paus

Låt oss ta en stund och fundera på vad vi nu har. Vi kan beskriva fysikaliska system. Vi kan göra förutsägelser och räkna ut förväntansvärden för mätningar på dem. Vi kan dela upp dem i delsystem. Teorin vi behöver är egentligen så gott som fullständig vid det här laget.

Innan vi avslutar denna förberedande artikel är det på sin plats att vi betraktar några mer eller mindre upplysande exempel och att vi diskuterar några effekter, och avsaknad av sådana, av kvantfysiken som inte finns i den klassiska. Detta kommer förbereda inför tillämpningar inom exempelvis kvantinformatik.

10 Praktiskt exempel: polarisation av fotoner

Ett särskilt enkelt system att studera är fotoner och polarisation. Vi ska nu studera i detalj hur enskilda och fler fotoner beter sig när de passerar

polariserande filter.

10.0 Beskrivning av fotoner genom polarisationsfilter

Låt oss betrakta en foton i $x^3 = z$ -riktningen, n_z . Den kan ha en *polarisation* som beskrivs av en riktning i det plan med konstant z som innehåller den position som fotonen befinner sig i. Detta kan beskrivas med ett tvådimensionellt hilbertrum, \mathcal{H} . Vi kan införa en bas om vi vill, enklast är väl en ortonormerad bas, e_x, e_y , relaterad till riktningarna n_x respektive n_y . Vad betyder då den polarisationsriktningen? Vi beskriver det genom filter.

Ett *polarisationsfilter* beskrivs också av en riktning, och sannolikheten för att en foton ska passera filtret är $\cos^2(\theta)$, där θ är den minsta vinkeln mellan fotonens polarisation och antingen filtrets riktning eller dess motsatta riktning (alltså riktningen med en faktor -1). Detta innebär att om de är likriktade (eller motriktade såklart) kommer fotoner passera filtret med full sannolikhet ($\cos^2(0) = 1$), om den minsta vinkeln mellan dem är ett åttondels varv kommer hälften gå igenom ($\cos^2(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$) och är minsta vinkeln mellan dem ett kvarts varv så kommer fotonen aldrig gå igenom ($\cos^2(\frac{\pi}{2}) = 0$).

Vi kan utifrån dessa resultat, kända sen länge från klassisk optik, konstruera en *polarisationsfilteroperator*, \mathcal{F} , som beskriver hurvida en foton passerar filtret eller inte. Egenvärdena är alltså 1 för passera och 0 för stoppa. Låt oss säga att filtret är riktat i en riktning n_ξ och beteckna detta som \mathcal{F}_ξ . Då kan vi införa en egenbas för operatoren i formen e_ξ och e_η , där n_η är en vinkelrät riktning från n_ξ . Vi kan då beskriva operatoren i den basen som:

$$(52) \quad \mathcal{F}_\xi = 1 \cdot e_\xi \otimes \epsilon^\xi + 0 \cdot e_\eta \otimes \epsilon^\eta$$

Låt oss nu säga att vi har en foton vars tillstånd i egenbasen för \mathcal{F}_ξ kan skrivas som $\psi = ae_\xi + be_\eta$. Vårt normeringsvillkor säger oss att $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Det för tankarna till den *trigonometriska ettan*, $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$. Vi kan alltså, utan att förlora någon generalitet eftersom riktningarna ändå kan multipliceras med faktor -1 godtyckligt, skriva koefficienterna med avseende på en parameter θ så att vi har $\psi = \cos(\theta)e_\xi + \sin(\theta)e_\eta$. Detta har ju givetvis en geometrisk tolkning, som jag avsiktligt undanhålligt för läsaren fram till nu eftersom jag anser att den minskar förståelsen i ett tidigt skede jämfört med en mer abstrakt beskrivning. Vad är förväntansvärdet för att fotonen ska passera filtret? Låt oss räkna ut det med hjälp av Borns regel:

$$(53) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}[\mathcal{F}_\xi] &= \langle \mathcal{F}_\xi \psi, \psi \rangle \\ &= \langle (1 \cdot e_\xi \otimes \epsilon^\xi + 0 \cdot e_\eta \otimes \epsilon^\eta)(ae_\xi + be_\eta), (ae_\xi + be_\eta) \rangle \\ &= \langle ae_\xi, ae_\xi \rangle \\ &= |a|^2 \\ &= \cos^2(\theta) \end{aligned}$$

Vilket var exakt det vi förväntade oss! Kompatibilitet med klassiska resultat betyder oftast (men inte alltid) att man gjort något rätt.

10.1 En foton igenom flera filter

Vi ska nu undersöka en situation och komma fram till ett underbart fantastiskt resultat. Vi föreställer oss en foton som är polariserad i någon riktning, säg n_x . Vi vet att $\mathcal{E}[\mathcal{F}_x] = 1$ för denna foton (om läsaren känner sig osäker så är det nog på sin plats att fundera en stund, ovan har nämligen allt förklarats som leder fram till den enkla slutsatsen, så det är bara att kontrollräkna!).

Nu sätter vi ett till filter omedelbart efter det första. Om vi väljer samma riktning, alltså ett filter som beskrivs av en identisk operator, \mathcal{F}_x , får vi naturligtvis samma förväntansvärde, 1. Fotonen började i tillståndet $\psi = e_x$. Detta är ett egentillstånd för \mathcal{F}_x med egenvärdet 1. Efter mätningen kommer ju tillståndet vara kvar i det egentillståndet. Samma gäller för nästa filter. Sannolikheten för fotonen att passera båda filtren är i så fall 1. $\mathcal{E}[\mathcal{F}_x \circ \mathcal{F}_x] = 1$ för vår foton som var polariserad i n_x från början.

Om vi vrider det andra filtret ett kvarts varv, så att det representeras av operatoren \mathcal{F}_y , hur stor är sannolikheten att fotonen kommer igenom? Den går ju alltid igenom det första filtret eftersom den började i det filtrets egentillstånd med egenvärde 1. Efter den mätningen kommer ju tillståndet vara oförändrat, $\psi = e_x$. Vi kan ju explicit räkna ut förväntansvärdet för \mathcal{F}_y , alltså $\mathcal{E}[\mathcal{F}_y]$ för ψ (på samma sätt som vi gjorde tidigare):

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[\mathcal{F}_x] &= \langle \mathcal{F}_x \psi, \psi \rangle \\ (54) \quad &= \langle 0, e_x \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Vi har alltså att den aldrig kommer igenom det andra filtret. Vårt resultat kan sammanfattas med att $\mathcal{E}[\mathcal{F}_y \circ \mathcal{F}_x] = 0$ för ett tillstånd $\psi = e_x$.

Nu kommer den stora överraskningen. Vi klämmer in ett till filter mellan de två vi redan har. Låt detta filter ligga i riktningen n_ξ sådan att

$$(55) \quad n_\xi = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)n_x + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)n_y$$

vilket alltså är roterat ett åttondels varv sådant att det pekar mitt emellan n_x och n_y . Denna operatoren skriver vi \mathcal{F}_ξ . Vi kan nu utnyttja vårt tidigare resultat för $\mathcal{E}[\mathcal{F}_\xi \circ \mathcal{F}_x]$. Vi har redan räknat ut att det blir

$$(56) \quad \begin{aligned} \cos^2(\theta) &= \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Hälften av fotonerna går alltså igenom de första två filtren. Kommer det sista filtret återigen sätta stopp för den tappra lilla hälften av fotoner som kämpat sig igenom de två första filtren? Vad vi bör minnas här är att fotonens tillstånd om den passerar det andra filtret är egentillståndet för det som har egenvärdet 1, alltså $\psi = e_\xi$. Vi kan här bespara oss några beräkningar (även om det inte alls är svårt att göra på samma sätt vi gjort tidigare för att använda Borns regel för att räkna ut förväntansvärden) genom att använda *Bayes sats*. Roter koordinatsystemen ett åttondels varv och använd samma argument med Bayes sats så ser vi att hälften av de överlevande fotonerna (alltså en fjärdedel av de som var med från början) från de två första filtren även passerar det tredje.

Vi måste summera detta. Vi har alltså de fantastiska resultaten

$$(57) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}[\mathcal{F}_y \circ \mathcal{F}_x] &= 0 \\ &\text{och} \\ \mathcal{E}[\mathcal{F}_y \circ \mathcal{F}_\xi \circ \mathcal{F}_x] &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Filtret vi sköt igenom gör alltså att fotoner, med nollskild sannolikhet, kan gå igenom det sista filtret, vilket inte var möjligt annars. Notera här att vi använt ett **filter** för att **inte filtrera** fotoner. Det är anmärkningsvärt och belyser en viktig punkt. Mätning (så som att låta fotonen gå igenom ett filter) får alltid tillståndet att kollapsa till ett egentillstånd för operatoren som motsvarar observabeln som mättes. När vi mätte med filtret i n_ξ så försattes den hälften av fotoner som kom igenom det i tillståndet e_ξ som är det egentillstånd för \mathcal{F}_ξ som har egenvärdet 1. Detta tillstånd är inte ortogonalt mot det egentillstånd för \mathcal{F}_y som har egenvärdet 1, alltså e_y . Å andra sidan är tillståndet direkt efter första filtret, e_x , ortogonalt mot e_y .

Det här är sannerligen ett fantastiskt resultat och läsaren uppmanas fundera på det tills det känns klart.

10.2 Sammanflätade fotoner genom var sitt filter

Det finns fysikaliska processer i vilka frihetsgrader begränsas av bevaranderelationer. Det finns ingen process som bryter emot, till exempel, rörelsemängdens, strömmens och rörelsemängdsmomentets bevarande. Rörelsemängdens bevarande leder till att, på en mycket liten skala (ända ned på fundamentala partiklars nivå), något som kallas för *spinn* (vi kommer inte gå in så mycket på det, jag lovar) bevaras. Vid en process så som annihilation av ett par partiklar vars spinnsumma är 0 (kan exempelvis vara en elektron med spinn $-\frac{1}{2}$ och

en positron med spinn $\frac{1}{2}$), som resulterar i två fotoner måste dessa fotoner (fotoner har alltid spinn 1 eller -1) ha spinn i exakt motsatt riktning mot varandra. Annars skulle inte rörelsemängden bevaras. Det vi tidigare har kallat polarisation beskrivs på kvantnivå med spinn. Vi behöver inte fundera mer på det utan det räcker med att vi förstår att det finns processer i vilka ett par av fotoner med samma polarisationsriktning (eventuellt skiljer de sig med en faktor -1 men den blir aldrig viktig).

Vi genomför ett sådant experiment och låter två partiklar annihileras till två fotoner på det sättet. Ett tillstånd för dessa två fotoner kan vi skriva som ett sammansatt tillstånd av två delsystem. Varje fotons polarisationstillstånd kommer bilda ett tvådimensionellt hilbertrum, \mathcal{H}_γ och vi har totalt rummet

$$(58) \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_\gamma \otimes \mathcal{H}_\gamma$$

Detta rum har dimension 4. En bas skulle kunna vara typ de fyra linjärt oberoende vektorerna

$$(59) \quad \begin{aligned} &e_x \otimes e_x, \\ &e_x \otimes e_y, \\ &e_y \otimes e_x, \\ &e_y \otimes e_y \end{aligned}$$

Vi minns att alla uppsättningar av fyra linjärt oberoende tillstånd är en bas för vårt \mathcal{H} , och en bas är bara för att vi ska kunna räkna ut saker så vi vill välja en, om vi ens måste välja en, som gör livet lättare för stunden. En gentleman väljer en bas om, och endast om, han verkligen behöver; och knappt ens då.

Våra två fotoner beskriver vi med tillståndet ψ (jo det finns ju andra symboler att använda, men ψ borde vid det här laget kännas trygg och bekant som en god gammal vän). Vi vet att båda fotonerna har polarisation i samma riktning, så koefficienterna för de basvektorer som är av blandade riktningar måste vara noll. Vi kan, i en ortonormerad bas likt den ovan, skriva tillståndet som

$$(60) \quad \psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_x \otimes e_x + e_y \otimes e_y)$$

(där vi passat på att normera också, vilket underlättar avsevärt när vi använder Borns regel). Vi bör här notera att det inte är något produkttillstånd utan ett sammanflätat tillstånd.

Låt oss nu undersöka vad som händer när vi låter dessa två fotoner gå igenom var sitt filter och ställa oss en viktig fråga. Vad är sannolikheten att båda passerar eller att båda stoppas (alltså korrelationen)?

För att göra beräkningarna aningen enklare så kommer vi ihåg att vi ovan skrev $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_x \otimes e_x + e_y \otimes e_y)$, vilket är giltigt för vilken ortonormerad bas som helst, alltså ganska godtyckligt. Låt därför, utan att på något sätt förlora allmänheten i experimentet, det ena (för enkelhetens skull kallar vi fotonerna härmed för den första och den andra fotonen, där vi skriver den första först och med denna notation gäller filtret i fråga den första fotonen) filtret vara i riktningen n_x , och alltså representeras av operatoren (kom ihåg att det är ett sammansatt tillstånd så operatorerna är sammansatta de med) $\mathcal{F}_x \otimes id$. Det andra filtret får vara i någon annan riktning, typ n_ξ på så sätt som vi definierade den riktningen tidigare i termer av parametern (vinkeln) θ .

Vi kan alltså skriva operatorerna som

$$(61) \quad \begin{aligned} & (\mathcal{F}_x \otimes id) \circ (id \otimes \mathcal{F}_\xi) \\ & \text{respektive} \\ & (id \otimes \mathcal{F}_\xi) \circ (\mathcal{F}_x \otimes id) \end{aligned}$$

beroende på vilken vi vill göra först. Vi är ännu inte säkra på om de kommuterar, utan det återstår att undersöka.

Låt oss börja med den senare ordningen. Vi beräknar i vanlig ordning resultatet av $(\mathcal{F}_x \otimes id)\psi$. Vår egenbas har egenvärdena 1 för $e_x \otimes e_x$ och $e_x \otimes e_y$ men 0 för $e_y \otimes e_x$ och $e_y \otimes e_y$, så vårt nya tillstånd blir:

$$(62) \quad (\mathcal{F}_x \otimes id)\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}e_x \otimes e_x$$

Vi ser ju här att förväntansvärdet för att gå igenom är en halv, $\mathcal{E}[(\mathcal{F}_x \otimes id)] = \frac{1}{2}$, vilket ju är rimligt för det är sannolikheten för att den ena fotonen ska gå igenom sitt filter medan vi inte provat den andra fotonen alls. Låt oss nu göra det genom operatoren $id \otimes \mathcal{F}_\xi$. Detta görs lättast genom att skriva om vårt tillstånd från egenbasen för $\mathcal{F}_x \otimes id$ till en egenbas för $id \otimes \mathcal{F}_\xi$. Vi skriver alltså om den andra termen i vår vektor enligt:

$$(63) \quad e_x = \cos(\theta)e_\xi - \sin(\theta)e_\eta$$

Med ξ och η som tidigare beskrivna. I dessa termer kan vi skriva vårt tillstånd, där den ena fotonen gått igenom filtret $\mathcal{F}_x \otimes id$ redan, som:

$$(64) \quad \psi = \frac{1}{\sqrt{2}}e_x \otimes (\cos(\theta)e_\xi - \sin(\theta)e_\eta)$$

Detta är skrivet i en egenbas för $id \otimes \mathcal{F}_\xi$ med egenvärdena 1 för $e_x \otimes e_\xi$ och $e_y \otimes e_\xi$ men 0 för $e_x \otimes e_\eta$ och $e_y \otimes e_\eta$. Vi kan alltså räkna ut sannolikheten att båda passerar till $\cos^2(\theta)$.

De är alltså korrelerade och det är lätt att se något slags skenbar effekt så som att mätningen i det andra filtret påverkas av mätningen i det första filtret men en stunds funderande borde leda läsaren till bättre tankar. Ett tips kan vara att betrakta alla utfallen och fundera på vad skillnad det gör om mätningarna är separerade med ett tidslikt eller ett rumslikt intervall (minns att rumslikt separerade intervall inte är tidsordnade). Det finns inget brott mot kausalitet här.

I stället för att beräkna den omvända operatorordningen explicit så kan vi använda ett geometriskt argument, nämligen att ursprungstillståndet, $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_x \otimes e_x + e_y \otimes e_y)$ var helt godtyckligt med avseende på riktningar så länge vektorerna är ortonormerade. Vi hade alltså lika gärna kunnat välja $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_\xi \otimes e_\xi + e_\eta \otimes e_\eta)$. Eftersom $\cos(\theta)$ är en jämn funktion ($\cos(-\tau) = \cos(\tau)$) är symmetrin perfekt och vi får samma förväntansvärden.

11 Utblick

Härifrån finns det många vägar att gå och mycket att fundera på. En fråga man kan ställa sig är vad som är beräkningsbart. Vi kommer förmodligen aldrig kunna beskriva stora objekt, som en människa eller en fotboll, med kvanttillstånd.

Kan vi utnyttja de effekter som kvantfysiken belyser som inte finns i klassiska modeller?

Vilka av våra antaganden gäller inte längre med kvantfysiska modeller?

A Notation och definitioner

Notationen som används skiljer sig en del från standardnotation inom ingenjörsvärlden och drar mer åt det hållet som används inom teoretisk såväl som matematisk fysik. Notationen följer [Fur22c] som läsaren bör konsumera vid det här laget.

Notationen för vektorer är den vanliga i stället för $\psi = |\psi\rangle$ som är vanligt inom ingenjörslitteratur.

På samma sätt för kovektorer, $\psi^* = \langle\psi|$, används inte.

Indices inom parentes innebär att det ska tolkas som något slags nummerlapp och har inget med koefficienter eller basvektorer att göra.

Einsteins summationskonvention gäller. $\sum_{\mu} a^{\mu} b_{\mu} = a^{\mu} b_{\pm mu}$.

Sannolikheter och förväntansvärden skrivs kalligrafiskt, \mathcal{P} respektive \mathcal{E} .

För operatörer används skriptur i stil med $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$.

Riktningsektorer, normerade till längden 1, skrivs vanligtvis med tecknet n , med någon koordinatriktning i indexposition, typ n_x .

För att inte smutsa ned har vi omvandlat allt till enheter sådana att $\hbar = c = 1$, alltså är Plancks strukna konstant och ljusets hastighet våra enheter för rörelsemängdsmoment respektive hastighet. Medelst dimensionsanalys kan läsaren återinföra dem där de saknas.

B Förkunskaper

Artikeln är skriven för att inte ställa särskilt höga krav på läsaren.

B.0 Naturfilosofi

Eftersom vi inte gick in så mycket på kvantmekanik utan mer på kvantfysiken som princip så ställs inte så stora krav på fysikkunskaper. Läsaren bör emellertid ha grundläggande kunskap inom

- ★ Klassisk mekanik (se exempelvis [Kra03a] och [Kra03b])

B.1 Matematik

Det mesta av matematiken som används sammanfattas i [Fur22c]. Läsaren bör ha kunskap inom

- ★ Linjär algebra, se [Gus13]

- ★ Multilinjär algebra, se [Gre78]
- ★ Komplexa tal, se [Ahl79]
- ★ Sannolikhetslära, se [Kol56] och [Jay79]

Det ställs, anmärkningsvärt, inga krav på att läsaren är bekväm med matematisk analys.

C Vidare läsning

En blivande kvantfysiker vill ju såklart veta mer. Grundläggande böcker inom kvantfysik som använts vid skrivandet av denna artikel är [Hen15], [Sha13], [Gri18], [Dir82], [Wol94] och [Neu32].

Om läsaren är villig att gå vidare inom kvantmekanik och kvantfältteori rekommenderas följande böcker som beskriver matematiken och fysiken: [Fol09], [Dar94], [Spi70], [Fom63], [Rud73], [Kol57], [Mag05], [Sch95], [Sch00], [Fol08], [Wei05], [Dre65] och [Bae92]. Vissa av dem kan vara ganska invecklade så en varning är på plats. Förlora inte hoppet!

Referenser

- [Fur22a] Anders Furufors. *Kvantinformatik, Del II: Kvantinformatikens principer*. 2022.
- [Fur22b] Anders Furufors. *Kvantinformatik, Del III: Kvantdatorer*. 2022.
- [Fur22c] Anders Furufors. *Matematisk introduktion*. 2022.
- [Kra03a] Meriam och Kraige. *Engineering Mechanics: Statics*. Wiley, 2003.
- [Kra03b] Meriam och Kraige. *Engineering Mechanics: Dynamics*. Wiley, 2003.
- [Gus13] Ivar Gustafsson. *Linjär algebra och numerisk analys*. Institutionen för matematik, Chalmers, 2013.
- [Gre78] Werner Greub. *Multilinear Algebra*. Springer Verlag, 1978.
- [Ahl79] Lars Ahlfors. *Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1979.
- [Kol56] Andrej Kolmogorov. *Foundations of the Theory of Probability*. Martino Fine Books, 1956.
- [Jay79] Edwin Thompson Jaynes. *Probability Theory: The Logic of Science*. Cambridge University Press, 1979.
- [Hen15] Måns Henningson. *Börja med kvantfysik*. Institutionen för fundamental fysik, Chalmers, 2015.
- [Sha13] Ramamurti Shankar. *Principles of Quantum Mechanics*. Springer Verlag, 2013.
- [Gri18] David Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2018.

- [Dir82] Paul Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics*. Clarendon Press, 1982.
- [Wol94] Haken och Wolf. *The Physics of Atoms and Quanta*. Springer Verlag, 1994.
- [Neu32] John Neumann. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Springer Verlag, 1932.
- [Fol09] Gerald Folland. *Fourier Analysis and Its Application*. American Mathematical Society, 2009.
- [Dar94] Richard Darling. *Differential Forms and Connections*. Cambridge University Press, 1994.
- [Spi70] Michel Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Publish or Perish, 1970.
- [Fom63] Gelfand och Fomin. *Calculus of Variations*. Prentice-Hall, 1963.
- [Rud73] Walter Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, 1973.
- [Kol57] Andrej Kolmogorov. *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*. Martino Fine Books, 1957.
- [Mag05] Michele Maggiore. *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*. Oxford University Press, 2005.
- [Sch95] Peskin och Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. CRC Press, 1995.
- [Sch00] Franz Schwabl. *Advanced Quantum Mechanics*. Springer Verlag, 2000.
- [Fol08] Gerald Folland. *Quantum Field Theory: A Tourist Guide for Mathematicians*. American Mathematical Society, 2008.
- [Wei05] Steven Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*. Cambridge University Press, 2005.
- [Dre65] Bjorken och Drell. *Relativistic Quantum Fields*. McGraw-Hill, 1965.
- [Bae92] John Baez. *Introduction to Algebraic and Constructive Quantum Field Theory*. Princeton University Press, 1992.