Elektromagnetiska fält, vågledare och antenner
Del I: Elektrodynamikens principer

Anders

4 september 2022 (13:57)

Sammanfattning

Häri beskrivs elektrodynamiken, sedan diskuteras EM-fält i närvaro av material, tidsharmoniska EM-fält och plana EM-vågor.

Innehåll

Innehåll ii

0 Inledning 0

1 Avgränsningar 1

2 Första tankar 2

3 Principer 3

4 Elektrostatik - Tidsoberoende fält 4
- 4.0 Coulombs lag . . . 4
- 4.1 Gauss lag . . . 4
- 4.2 Elektrisk potential . . . 5
- 4.3 Elektrisk dipol och dielektriska media . . . 6
- 4.4 Gränssnittsvillkor för elektriska fält . . . 6

5 Magnetostatik 7
- 5.0 Biot-Savarts lag . . . 7
- 5.1 Strömmar i B-fält . . . 7
- 5.2 Amperes lag . . . 7
- 5.3 Magnetisk potential . . . 8
- 5.4 Magnetisk dipol . . . 8
- 5.5 Magnetisering av material . . . 8
- 5.6 Gränssnittsvillkor för magnetiska fält . . . 9

6 Magnetodynamik 10
- 6.0 Faradays induktionslag . . . 10
- 6.1 Energi i magnetiska fältet . . . 10
- 6.2 Själv- och ömsesidig induktans . . . 11
- 6.3 Maxwells ekvationer för fria källor . . . 11
- 6.4 Poyntings sats . . . 11

7 Återblick och omformulering av teorin 13
- 7.0 ¤ Lagranges formulering . . . 13
  - 7.0.0 ¤ Faradaytensorn . . . 13
  - 7.0.1 ¤ Lorentzkraften . . . 13
- 7.1 ¤ Lagranges ekvation, Gauss lag och Ampères lag . . . 14
- 7.2 Lärdomar från lagranges formulering . . . 14

8 Sammanfattning: Elektrodynamik 15

9 Material 17
- 9.0 E och D respektive B och H . . . 17
  - 9.0.0 Bundna och fria laddningar och strömmar . . . 17
- 9.1 Allmänt om konstitutiva relationer . . . 18
- 9.2 Isotropa, linjära material . . . 18
- 9.3 Anisotropa, linjära material . . . 19
  - 9.3.0 Bianisotropa, linjära material . . . 19

9.4 Dispersiva material 19
9.4.0 Isotropa, linjära dielektrika med temporal dispersion . . 20
9.4.1 Polarisationsprocesser av olika ordningar och optisk respons 20
9.5 Modeller för minnesfunktionen 21
9.5.0 Lorentzmodellen 21
9.5.1 Drudemodellen 22
9.5.2 Debyemodellen 23

10 Tidsharmoniska fält **24**
10.0 Monokromatiska fält 24
10.1 Polarisation hos monokromatiskt fält 24
10.1.0 Specialfall av polarisation 24
10.2 Fältekvationerna för tidsharmoniska fält 25
10.3 Poyntings sats och energi i fältet för tidsharmoniska fält 26
10.4 Konstitutiva relationer för monokromatiska fält 27
10.4.0 Bianisotropa material för monokromatiska fält 27

11 Plana EM-vågor **28**
11.0 Plana vågor i isotropa material 28
11.1 Reflektion och transmission av plan våg 29
11.2 Reflektion och transmission av TE- och TM-våg 30
11.3 Brytningslag 32
11.4 Brewsters vinkel 34
11.5 Infallande plan våg mot ledande yta 34

A Notation och definitioner **36**
A.0 Storheter 36

B Förkunskaper **37**
B.0 Naturfilosofi 37
B.1 Matematik 37

C Vidare läsning **38**

D ¤ Analogi mellan gravitation och elektrodynamik **39**

Referenser **40**

0 Inledning

Denna artikel tjänar som en förberedelse inför [Fur22a] och [Fur22b]

Elektrodynamik handlar om den elektromagnetiska växelverkan som beskriver hur det elektromagnetiska fältet (EM-fältet) orsakas av och interagerar med elektriska laddningar och strömmar. EM-fältet är alltså laddningar och strömmars sätt att kommunicera med varandra på samma sätt som gravitation är massors sätt att kommunicera med varandra†.

Vi behöver, till elektrodynamiken, inte beakta massor alls, utan de blir först intressanta då vi ska räkna ut accelerationer och dylikt. Ta som exempel den bekanta lorentzkraften (se ekvation 38). Den beskriver kraften på en partikel med laddning, men den säger inget om hur partikeln kommer att accelerera. För att beskriva det måste vi ta hänsyn till massan.

†Enligt Newtons teori för gravitation. Einsteins formulering, som verkar stämma bättre överens med verkligheten är litet krångligare och kanske inte helt analog

1 Avgränsningar

I denna artikel beskrivs elektrodynamiken i sin klassiska formulering. Kvanteffekter kommer inte beaktas och inte heller någon hänsyn kommer tas till relativitet, bortsett från vad som redan från början är inbyggt i teorin.

När elektrodynamiken är beskriven diskuteras några intressanta specialfall:

- ⋆ EM-fält i närvaro av material
- ⋆ Tidsharmoniska EM-fält
- ⋆ Plana vågor

2 Första tankar

Innan vi börjar ordentligt bör vi fundera på vad källor och fält är. Källor, i vårt fall laddningstäthet och flödestäthet av laddningar, ger upphov till fält som påverkar andra laddningar och strömmar.

Vanligen skiljer man mellan laddningar och strömmar. Laddningar ger upphov till elektriska fält och strömmar ger upphov till magnetiska fält. Elektriska fält interagerar med laddningar och magnetiska fält interagerar med strömmar. Denna bild fungerar inte riktigt.

Det går inte att skilja mellan en laddningstäthet och en flödestäthet eftersom de fundamentalt är detsamma. Föreställ dig en laddning i vila. Om du börjar promenera utan att röra den så är det inte längre en laddning i vila utan en laddning med en ström. På samma sätt går det inte att skilja mellan det elektriska fältet och det magnetiska. Låt oss nu bygga upp teorin från grunden genom att se hur källorna ger upphov till fält och fälten påverkar källorna.

3 Principer

Det finns några återkommande principer som gäller för fysiken i allmänhet. En Av de viktigaste är *superpositionsprincipen* eller principen om *linjaritet*. Enligt den kommer en summa av lösningar av en linjär ekvation (kom ihåg att differentialoperatorn är linjär) fortfarande löser ekvationen.

Vi kommer flitigt att använda superpositionsprincipen för att beskriva ett fält orsakat av källor som summan av bidraget från varje sådan källa. Kort sagt kan vi för en fältpunkt integrera bidraget från varje källpunkt. Källpunkterna kommer i fältpunkten ge var sitt bidrag vars styrka beror av källans styrka (alltså laddningstätheten eller strömtätheten) och avstånd från fältpunkten och vars riktning beror på riktningen mellan fältpunkt och källpunkt.

En annan princip är att dela upp energin i en fältterm och en växelverkansterm. Fälttermen beskriver energin i fältet själv medan växelverkanstermen beskriver energin som kommer av laddningarnas och strömmarnas interaktion med fältet. Denna uppdelning gör energiflöden, effekt och rörelsemängd mer lättbeskrivliga.

4 Elektrostatik - Tidsoberoende fält

4.0 Coulombs lag

Vi börjar med att betrakta det *elektriska fält* som en *laddning* ger upphov till. *Coulombs lag* är till grunden för hela elektrostatiken. Den gäller krafter mellan laddningar som är i vila mot varandra och kan sammanfattas som följer:

0. Direkt proportionell mot produkten av laddningarnas storlek.
1. Proportionell mot inversen av kvadraten av avståndet mellan dem.
2. Riktad längs den räta linjen i rummet mellan dem.
3. Attraktiv för olika, repulsiv för lika.

För laddningar, q_a, q_b, med avstånd $r_{a\to b}$, kan kraften, F_a, som verkar på laddning q_a beskrivas som:

$$F = q_a q_b \frac{r_{a\to b}}{|r_{a\to b}|^3} \tag{0}$$

Låt oss nu utvidga detta till fältnotation. Då har vi för ett elektriskt fält, E, som orsakas av en laddning, q_a:

$$E(x) = q_a \frac{r_{a\to x}}{|r_{a\to x}|^3} \tag{1}$$

En testpartikel med laddning q_b skulle alltså uppleva kraften $q_b E(b) = q_a q_b \frac{r_{a\to b}}{|r_{a\to b}|^3}$, vilket helt stämmer med ekvation 0. För ett system med fler laddningar kan superpositionsprincipen användas för att summera bidraget från olika laddningar. I makroskopiska sammanhang kan man ansätta en laddningsfördelning, ρ, inom något område, Ω, och integrera över den för att summera bidraget och på så sätt få fältstyrkan:

$$E(x) = \int_\Omega d^3y\ \rho(y) \frac{r_{y\to x}}{|r_{y\to x}|^3} \tag{2}$$

4.1 Gauss lag

Eftersom rörelsemängd måste bevaras kan inte normalytintegralen över en yta som innesluter en laddning skilja sig från den inneslutna laddningens styrka. Således har vi relationen, för en yta $\partial\Omega$, med utåtriktad normal n, som innesluter en laddning, q:

(3) $$\int_{\partial\Omega} d^2x \ \langle n, E(x)\rangle = q$$

Vi erinrar oss nu om Gauss identitet från vektoranalysen (för någon volym Ω med rand $\partial\Omega$, och något vektorfält, V):

(4) $$\int_{\partial\Omega} d^2x \ \langle n, V\rangle = \int_{\Omega} d^3x \ \nabla \cdot V$$

Vi har alltså att divergensen av det elektriska fältet är laddningstätheten. $\nabla \cdot E(x) = \rho(x)$

4.2 Elektrisk potential

Det elektriska fältet kan ekvivalent beskrivas som gradienten av en endimensionell potential, $E(x) = -\nabla\Phi$ som kallas för den *elektriska potentialen* eller *skalärpotenitalen* (Den intresserade läsaren kan även betrakta analogin med Newtons gravitationsteori, kapitel D). Eftersom rotationen av ett konservativt fält är noll, och gradienter alltid är konservativa har vi att det elektriska fältet, med nuvarande förutsättningar, är rotationsfritt.

Potentialen lyder Poissons ekvation: $\Delta\Phi(x) = -\rho(x)$. Denna kan användas för att lösa diverse randvärdesproblem. Vanligt är att man, för en godtycklig laddningsfördelning, definierar nollpotentialen som oändligt långt borta, $\Phi(\infty) = 0$. För sådan definition kommer potentialen från en laddning, q_a, (superpositionsprincipen gäller fortfarande på samma sätt som för det elektriska fältet):

(5) $$\Phi(x) = q_a \frac{1}{|r_{a\to x}|}$$

Låt oss betrakta en kontinuerlig laddningsfördelning och beräkna den totala energin enligt ovan definition:

(6) $$E = \iint \frac{\rho(x)\rho(y)}{2|r_{x\to y}|} \ d^3x d^3y$$

Vi inser här att vi kan byta ut en av integranderna mot den elektriska potentialen, och vi får således $E = \frac{1}{2}\int \rho(x)\Phi(x) d^3x$. Vidare kan vi utnyttja Poissons ekvation och skriva om till $E = -\frac{1}{2}\int \Phi\Delta\Phi d^3x$. Partiell integration ger $E = \frac{1}{2}\int E\cdot E d^3x$, vilket leder oss till att definiera *energidensiteten* fältet ger upphov till som $\frac{dE}{dV} = \frac{E\cdot E}{2}$.

4.3 Elektrisk dipol och dielektriska media

Ingen *multipolsexpansion* här det pallar vi inte just nu[†]. En *dipol* är en simpel men ofta förekommande laddningsfördelning som består av en negativ laddning, q_- och en positiv, q_+ med vardera samma magnitud, q, fast olika tecken. Vi definerar *dipolmomentet* som $p = qr_{-\to+}$. Det elektriska fältet från en sådan fördelning, minns superpositionsprincipen ovan 1, kan skrivas (för dipol vid y och n enhetsvektor som pekar från y till x):

$$E(x) = \frac{3n\langle p, n\rangle - p}{|r_{y\to x}|^3} \tag{7}$$

Låt vektorfältet för *dipolmomenttätheten* (även kallat *polarisationsfältet*) betecknas $P(x)$. Då kan vi definiera *förskjutningsfältet*, $D(x) = E(x) + P(x)$, där de mellan sig förhåller sig enligt $D = \epsilon E$, där ϵ kallas *permittiviten* i materialet. Om ϵ beror av position så gäller inte längre ekvation 3 för fria laddningar (den gäller emellertid alltid om vi tar hänsyn till laddningar i allmänhet) utan den måste modifieras till $D(x)$. Vi får den bekanta $\nabla \cdot D = \rho$. Man kan säga att P-fältet är en motverkande effekt av E-fältet som uppstår av att det blir gynnsamt (med avseende på att minska potential) för materialet att ordna sig i dipoler.

4.4 Gränssnittsvillkor för elektriska fält

I gränssnittet mellan två material, a och b, vars yta har normal $n_{a\to b}$ kan vi formulera följande förhållanden:

$$(D_B - D_a) \cdot n_{a\to b} = \sigma \tag{8}$$

$$(E_B - E_a) \times n_{a\to b} = 0 \tag{9}$$

Där σ är *ytladdningstätheten*. Med andra ord är tangentiella komponenten av E-fältet alltid bevarad över gränssnitt, medan den normala komponenten av D-fältet gör ett hopp som motsvaras av ytladdningstätheten.

[†]Vill man ha sånt kan man läsa typ [Jac62].

5 Magnetostatik

5.0 Biot-Savarts lag

Magnetiska fält kommer från laddningar i rörelse. För en *ström*, j, i en ledare, l, kommer ett magnetiskt fält enligt bidrag, dB från varje längdelement av ledaren, $d\ell$ med riktning n_ℓ, som är belägen i punkten a:

$$dB(x) = d\ell \; |j| \frac{n_\ell \times r_{a \to x}}{|r_{a \to x}|^3} \tag{10}$$

För en fri laddning, q_a i rörelse, med hastighet v har vi:

$$B(x) = q \frac{v \times r_{a \to x}}{|r_{a \to x}|^3} \tag{11}$$

Superposition gäller som vanligt.

5.1 Strömmar i B-fält

För en ledare, med *ström* j längs ℓ kommer kraftbidraget från ett B-fält vara:

$$dF = d\ell \; |J| n_\ell \times B \tag{12}$$

Mer allmänt för en *strömtäthet*, $J(x)$ i ett B-fält, $B(x)$ har vi kraftfältet:

$$F = \int J(x) \times B(x) \; d^3x \tag{13}$$

5.2 Amperes lag

Från ekvation 10 kan vi formulera en mer allmän form för magnetfältet, B, runt en strömtäthet, J:

$$B(x) = \int J(y) \times r_{y \to x} \frac{1}{|r_{y \to x}|^3} \; d^3y \tag{14}$$

Vi kan jämföra denna med ekvation 2. B-fältet kan alltså skrivas som rotationen av en vektorpotential. Detta innebär att B-fältet är divergensfritt. Det finns inga *magnetiska källor*. Inga *magnetiska monopoler*. $\nabla \cdot B = 0$. Rotationen av det magnetiska fältet är proportionell mot strömtätheten, $\nabla \times B = J$.

5.3 Magnetisk potential

På samma sätt som vi hade en skalärpotential för elektriska fältet kan vi uttrycka magnetiska fältet i en potential också, denna benämns den *magnetiska potentialen* eller *vektorpotentialen*:

$$B(x) = \nabla \times A(x) \tag{15}$$

Notera att A är bestämd upp till gradienten av ett skalärt fält ity rotationen av en sådan term är identisk noll och den kommer således inte bidraga. Valet av sådan term är godtyckligt så länge det uppfyller villkoret. Ofta väljs $\nabla \cdot A = 0$ sådan att termen uppfyller Laplaceekvationen (men det är inte så viktigt för dessa sammanhang).

5.4 Magnetisk dipol

Föreställer vi oss en cirkulär strömslinga, med ström j och radie a, så får vi, i punkten x från strömslingans centrum, y, med polarvinkel från symmetriaxeln, θ:

$$B \cdot \hat{r}_{y\to x} = \frac{ja^2}{2}\frac{cos(\theta)}{|r_{y\to x}|^3} \tag{16}$$

$$B \cdot \hat{\theta} = \frac{ja^2}{4}\frac{sin(\theta)}{|r_{y\to x}|^3} \tag{17}$$

Vi kan notera likheten med de elektriska dipolerna, i synnerhet tredjegradsavtagandet i styrkan med avståndet. Vi kallar en sådan slinga för *magnetisk dipol* och definierar det *magnetiska dipolmomentet*:

$$m = \pi j a^2 \tag{18}$$

5.5 Magnetisering av material

Material kan *magnetiseras* på samma sätt som de polariserades i tidigare avsnitt. Återigen kan det ses som att laddningarna i mateialet går in i ett gynnsamt tillstånd som försöker motverka B-fältet. Detta yttrar sig i små magnetiska dipoler (strömslingor) i materialet. Det resulterande fältet kallas för *magnetiseringsfältet*, M, och är tätheten av magnetiska dipoler. Vi kan också definiera differensen, dvs det magnetiska fältet utan bidraget från magnetiska dipoler, $H = B - M$. På samma sätt som vi gjorde med D- och E-fälten kan vi skriva om $\nabla \times B = J$ till $\nabla \times H = J$ för fria strömmar, J. Notera dock att den första fortfarande gäller om vi tar hänsyn till hela strömtätheten, J. Nu kan vi formulera magnetostatikens lagar:

$$\nabla \cdot D = \rho \qquad \nabla \times H = J$$
$$\nabla \times E = 0 \qquad \nabla \cdot B = 0 \tag{19}$$

5.6 Gränssnittsvillkor för magnetiska fält

I gränsytan mellan två material, a och b, med normal enhetsvektor, n, har vi:

$$(B_b - B_a) \cdot n = 0 \tag{20}$$

$$n \times (H_b - H_a) = K \tag{21}$$

Där K är ytströmtätheten.

6 Magnetodynamik

6.0 Faradays induktionslag

För en ledande slinga, ℓ, runt en sammanhänhande yta, Ω med utåtriktad normal n, i ett magnetfält, B, gäller:

$$\int_{\partial\Omega} d\ell \, \langle n_\ell, E\rangle = -\frac{d}{dt}\int_{\Omega} \langle n, B\rangle \, d^2x \tag{22}$$

Vänsterledet beskriver integralen av elektriska fältet längs en slinga, alltså en potentialskillnad. Vänsterledet beskriver förändringen i magnetiskt flöde (definierat som integralen av magnetiska fältet över en yta) genom slingan i tiden. Låt oss definiera potentialskillnaden som V_{ind} och magnetiska flödet som Φ. Då har vi (på en vanligt förekommande form):

$$V_{\text{ind}} = -\partial_t \Phi \tag{23}$$

Alltså, den inducerade spänningen i en slinga är proportionell mot tidsförändringen av magnetiska flödet genom slingan. Vi kan även uttrycka detta som (Stokes sats osv.) $\int_{\partial\Omega}\langle n, (\nabla \times E + \partial_t B)\rangle \; d^2x = 0$. Eftersom det gäller för godtyckliga ytor så måste integranden vara noll överallt, vilket leder oss fram till differentialformen av ovan lagar:

$$\nabla \times E + \partial_t B = 0 \tag{24}$$

Vilket är den tidsberoende varianten av $\nabla \times E = 0$.

6.1 Energi i magnetiska fältet

På samma sätt som vi har för elektriska fältet så är energin i magnetiska fältet proportionell mot $B \cdot B$. Intressantare än så är det inte. Vi kan också yttrycka det i den magnetiska potentialen:

$$\begin{aligned} 2W &= \int H \cdot B d^3x \\ &= \int J \cdot A d^3x \end{aligned} \tag{25}$$

6.2 Själv- och ömsesidig induktans

Låt oss föreställa oss ett system av N strömslingor, var och en med ström j_i. Vi använder ekvation 25 för att skriva energin i systemet som:

$$W = \frac{1}{8\pi} \int d^3x \int d^3y \frac{J(x) \cdot J(y)}{|r_{x \to y}|} \tag{26}$$

Om vi i stället summerar integralerna för de olika slingorna får vi en simplare variant:

$$W = \frac{1}{8\pi} \sum_{i=1}^{N} \int d^3x_i \sum_{j=1}^{N} \int d^3y_j \frac{J(x_i) \cdot J(y_j)}{|r_{x \to y}|} \tag{27}$$

Vi kan skilja mellan fallen $i = j$ och $i \neq j$. Dessa uttryck ger då koefficienter för ett alternativt sätt att skriva energin på, genom *självinduktanser*, L_i och *ömsesidiga induktanser*, M_{ij}:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} L_i j_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j>i}^{N} M_{ij} j_i j_j \tag{28}$$

6.3 Maxwells ekvationer för fria källor

Nu är vi redo att skriva upp elektrodynamikens (alltså tidsberoende) ekvationer i termer av de fria källorna. Vi modifierar 19 genom att ta hänsyn till *kontinuitetsekvationen* för laddningar (jämför kcl), $\nabla \cdot J + \partial_t \rho = 0$, och *Ohms lag*, $J = \sigma E$, där $\sigma = R^{-1}$ är *konduktiviteten* (invers av *resistans*). Vi har alltså att den tidsberoende strömtätheten kan skrivas $J + \partial_t D$. Därtill lägger vi uttrycket för rotationen av E-fältet vi fann. Alltså får vi Maxwells ekvationer:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot D &= \rho & \qquad \nabla \times H &= J + \partial_t D \\ \nabla \times E + \partial_t B &= 0 & \qquad \nabla \cdot B &= 0 \end{aligned} \tag{29}$$

6.4 Poyntings sats

Effekten av ett elektriskt fält är $\int J \cdot E d^3x$. Med 29 kan vi skriva om integranden till $\nabla \cdot (E \times H) + E \cdot \partial_t D + H \cdot \partial_t B$. Med denna omskrivning kan vi använda energitätheten, $\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2}(E \cdot D + B \cdot H)$ för att skriva effekten som $\partial_t W = -\int \partial_t \frac{dW}{dV} + \nabla \cdot (E \times H) d^3x$. Eftersom detta gäller för godtycklig volym måste det gälla överallt. Alltså har vi en differentiell lag för energitäthetens bevarande:

$$\partial_t \frac{dW}{dV} + \nabla \cdot S = -J \cdot E \tag{30}$$

Där $S = E \times H$ kallas för *poyntingvektorn* och representerar energiflödet.

7 Återblick och omformulering av teorin

Vid detta skede är teorin så gott som fullständig. I kapitlen som följer efter detta kommer specialfall av elektrodynamiken betraktas och diskuteras eftersom de utgör särskilt viktiga rent praktiskt. Innan vi fortsätter kan det vara på sin plats att formulera om teorin på ett alternativt sätt med hjälp av den så kallade verkansprincipen. Om läsaren inte är van vid denna metod, eller känner sig obekväm med matematiken eller notationen (ovana vid variationskalkyl eller multilinjär algebra) så borde det gå att skippa kapitlet i sin helhet förutom avsnitt 7.2 som kan ge insikter utan att matematisk mognad krävs.

7.0 ¤ Lagranges formulering

Lagrangianen, från vilken vi kommer att erhålla Maxwells ekvationer består av två delar. En del som beskriver fältet och en del som beskriver kopplingen mellan laddningar och strömmar å ena sidan, och fälten å andra sidan. Med andra ord, en fältterm och en växelverkansterm. Fälttermen visar sig vara energin i fältet:

$$W = \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = B^2 - E^2. \tag{31}$$

7.0.0 ¤ Faradaytensorn

Här passar vi på att introducera *Faradaytensorn*, $F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$. Detta objekt kan skrivas som den yttre derivatan av en potential, $F = dA$. Potentialen är helt enkelt samma som vi haft hela tiden, $A = \Phi dt + A_x dx + A_y dy + A_z dz$, alltså tidskomponeten är skalärpotentialen medan rumskomponenterna är vektorpotentialen. Vi kan notera att F är helt antisymmetrisk, så dess diagonal är 0. Detta ger sex frihetsgrader, och dessa sex frihetsgrader beskriver de fält vi kallat för E och B. Vi kan alltså skriva dess komponenter som

$$F_{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \tag{32}$$

Och i termer av E och B har vi

$$E_i = F_{0i}, \quad B_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^{jk} \tag{33}$$

7.0.1 ¤ Lorentzkraften

Innan vi går vidare med lagrangianen funderar vi på om vi kan göra något mer än att ta den inre produkten mellan faradaytensorn och sig själv (se 31). Vad händer om vi låter den verka på hastigheten, $v^\mu \partial_\mu$ av en partikel med laddning, q? Vi får

$$qF_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu v^\mu \partial_\mu = q f_\nu dx^\nu \tag{34}$$

Där f är *lorentzkraften*. Den beskriver ändringen av laddningens rörelsemängd. Tidskomponenten är ändringen i energi, alltså $qf_0 = q\partial_0 A_0$. Rumskomponenterna beskriver ändringen av den rumsliga rörelsemängden, $qf_k = q[E_k + (v \times B)_k]$.

Låt oss nu utvidga detta från en laddning till en hel ström, j, sådan att $j^0\partial_0$ tolkas som laddningstätheten och $j^k\partial_k$ tolkas som strömmen. Vi kan då beskriva hela rörelsemängdsförändringen för en hel strömfördelning, $F_{\mu\nu} j^\nu dx^n = f_\nu dx^\nu$.

7.1 ¤ Lagranges ekvation, Gauss lag och Ampères lag

Nu är vi redo att teckna upp lagrangianen för elektrodynamiken,

$$\mathcal{L} = \overbrace{-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}^{\text{Fältterm}} + \overbrace{j^\mu A_\nu}^{\text{Interaktionsterm}} \tag{35}$$

Den första termen är energin i fältet, och den andra termen är energin från växelverkan. Låt oss variera med avseende på $A_0 dx^k$ för att hitta stationär kurva. Häri tänker jag inte skriva ut det explicit, men det lättaste är att skriva om F i termer av A och bara köra på. Resultatet blir Gauss lag, $\nabla \cdot E = \rho = A_0 dx^0$. Samma sak fast med avseende på $A_k dx^k$ ger Ampères lag, $(\nabla \times B)_k = \partial_t E_k - j_k$. Skriver vi allt i ett blir det helt enkelt $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$.

Gauss magnetismlag och Faradays lag kan på liknande kompakt vis skrivas som $\partial_\mu(\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}) = 0$.

7.2 Lärdomar från lagranges formulering

Varför all denna onödigt komplicerade matematik? Jo den visar, tydligare än vanlig vektoranalys, hur vi kan betrakta fältets växelverkan med laddningarna. Låt oss betrakta potentialerna. Den skalära potentialen beskriver hur mycket energi som krävs för att flytta laddningarna i rummet. Det är alltså enkelt att se hur den är sammankopplad med det elektriska fältet. På samma sätt beskriver vektorpotentialen hur mycket energi som krävs för att förändra hastigheten av en laddning. Det går även med denna formulering att enklare se likheter med andra teorier, se exempelvis D.

8 Sammanfattning: Elektrodynamik

Nu när teorin är färdig kan vi sammanfatta.

Maxwells ekvationer:

$$\begin{aligned} \nabla\cdot E &= \rho & \nabla\times B &= J+\partial_t E \\ \nabla\times E+\partial_t B &= 0 & \nabla\cdot B &= 0 \end{aligned} \tag{36}$$

Maxwells ekvationer i material:

$$\begin{aligned} \nabla\cdot D &= \rho & \nabla\times H &= J+\partial_t D \\ \nabla\times E+\partial_t B &= 0 & \nabla\cdot B &= 0 \end{aligned} \tag{37}$$

Där vi har använt $D = E+P$ som det 'fria' elektriska fältet, alltså kompenserat för polarisering i materialet och på samma sätt $H = B - M$ som det 'fria' magnetiska fältet, alltså kompenserat för magnetisering i materialet. Dessa fält existerar inte utan har bara införts som hjälpmedel för beräkning.

Lorentzkraften:

$$f = (E + v\times B) \tag{38}$$

Som alltså är kraften per laddning som en partikel med hastigheten v känner.

Kontinuitetsekvationen:

$$\partial_t\rho + \nabla\cdot j = 0 \tag{39}$$

Alltså med andra ord laddningens bevarande, $\partial_\mu j^\mu = 0$.

Vågekvationer:

$$\begin{aligned} (\partial_t^2-\Delta)E &= -\nabla\rho+\partial_t J \\ (\partial_t^2-\Delta)b &= \nabla\times J \end{aligned} \tag{40}$$

Notera att i vakuum uppfyller de vågekvationen, $(\partial_t^2-\Delta)\Psi = 0$.

Energi, rörelsemängd och Poyntings sats:

$$
\begin{aligned}
&(41) \qquad W_{\text{int}} = \Phi\rho + A \cdot J && W_{\text{field}} = \frac{1}{2}B^2 - E^2 \\
&\qquad\quad p_{\text{int}} = E \cdot J && p_{\text{field}} = E \cdot \partial_t D + H \cdot \partial_t B \\
&\qquad\quad S = E \times H && p_{\text{int}} + p_{\text{field}} = -\nabla \cdot S
\end{aligned}
$$

Där vi delat upp energin och rörelsemängden i en växelverkansdel som beskriver hur laddningar och strömmar interagerar med fältet och en fältdel som beskriver energi och rörelsemängd i fältet själv. Poyntingvektorn, S kan betraktas som totala elektrodynamiska rörelsemängden, och i dess riktning flödar alltså energin.

Randvillkor:

$$
\begin{aligned}
&(42) \qquad n_{b\to a} \times (E_a - E_b) = 0 && n_{b\to a} \times (H_a - H_b) = K \\
&\qquad\quad n_{b\to a} \cdot (D_a - D_b) = \sigma && n_{b\to a} \cdot (B_a - B_b) = 0
\end{aligned}
$$

Där σ är ytladdningen, och K är ytströmtätheten. n beskriver en enhetsvektor i normalriktningen för planet som skiljer materialen sådant att $n_{b\to a}$ pekar från b till a.

Detta sammanfattar hela elektrodynamiken. Hädanefter ägnas denna artikel helt åt specialfall som får anses särskilt intressanta.

9 Material

Vi har redan, mycket ytligt, betraktat närvaro av material då vi formulerade Maxwells ekvationer i material (ekvation 29). Vi ska här gå in djupare i teorin och betrakta material av olika slag och hur elektrodynamiken ser ut i dessa.

9.0 E och D respektive B och H

För att kompensera för bundna laddningar och strömmar, alltså sådana i material, har vi tidigare infört fälten $D = E + P$, där D kallas för förskjutningsfältet och P kallas för polarisationen, och $H = B - M$, där H kallas för magnetiserande fältet och M kallas för magnetiseringen. Låt oss betrakta dessa närmre, ständigt påmindna om att dessa fält inte existerar utan har införts som hjälpmedel för beräkningar.

9.0.0 Bundna och fria laddningar och strömmar

Låt oss dela upp laddningstätheten i $\rho = \rho_f + \rho_b$, alltså en fri del och en bunden del där den bundna delen tolkas som att den hör till ett material. Låt oss vidare betrakta det elektriska fältet ifrån enbart den bundna laddningstätheten, $E_b = -\nabla \cdot \rho_b = -\nabla \cdot P$. Detta är alltså polarisationsfältet.

Låt oss nu se om vi kan göra liknande för strömtätheterna. $J = J_f + J_b$. De bundna laddningarna och strömmarna ska uppfylla kontinuitetsekvationen (ekvation 39),

$$\partial_t \rho_b + \nabla \cdot J_b = 0 \tag{43}$$

Sätter vi in uttrycket för divergensen av polarisationsfältet får vi:

$$\nabla \cdot (J_b - \partial_t P) = 0 \tag{44}$$

Här inser vi att denna ekvation löses av ett divergensfritt fält, alltså rotationen av något:

$$J_b - \partial_t P = \nabla \times M \tag{45}$$

Varför M? Jo det ser vi genom att den bundna strömtätheten består av två bidrag, $J_b = J_p + J_m$, alltså summan av de linjära rörelserna av laddningar som kommer av att polarisationen ändras ($\partial_t P$), och de cirkulerande rörelserna av laddningar i materialet ($\nabla \times M$).

9.1 Allmänt om konstitutiva relationer

Konstitutiva relationer är modeller som binder samman materialegenskaper med elektrodynamiken sådana att elektrodynamiken beskrivs i materialen. De konstitutiva relationerna brukar vara ett namn på de ekvationer som binder samman fälten E, D, B, H, enligt ekvation 29. De besrkiver alltså hur laddningar och strömmar i material påverkar fältet i materialet.

9.2 Isotropa, linjära material

Vi börjar, så som traditionen bjuder, med det enklaste av fall. Om polarisationen i ett material är proportionell mot det elektriska fältet kallas materialet för ett *linjärt dielektrikum.* Är vidare denna proportionalitet oberoende av riktning kallas materialet för *isotropt.* Då kan vi skriva detta förhållande som

$$P(x)\chi^e E(x) \tag{46}$$

Där vi infört $\chi(x)^e$ som kallas den *elektriska susceptibiliteten.* Om vidare $\chi(x)^e = \chi^e$, alltså ortsoberoende, kallas materialet för *homogent.*

Sätter vi in detta i vårt uttryck för förskjutningsfältet så har vi

$$\begin{aligned} D &= E + P \\ &= E + \chi^e E \\ &= \epsilon_r E \end{aligned} \tag{47}$$

Där vi infört symbolen $\epsilon_r = 1 + \chi^e$, som kallas den *relativa permittiviteten.* På samma sätt får vi liknande uttryck för sambandet mellan magnetisering och magnetfält i ett isotropt och linjärt material:

$$M(x) = \chi^m(x)B(x) \tag{48}$$

Där $\chi^m(x)$ kallas för den *magnetiska susceptibiliteten.* Låt oss på samma sätt sätta in det i uttrycket för det magnetiserande fältet:

$$\begin{aligned} H &= B - M \\ &= B - \chi^m B \\ &= \frac{1}{\mu} B \end{aligned} \tag{49}$$

Där vi infört symbolen $\mu = \frac{1}{1-\chi^m}$, som kallas för den *relativa permeabiliteten.* Det finns tyvärr annorlunda definitioner av detta i litteraturen så man får se upp!

9.3 Anisotropa, linjära material

Om vi kastar undan det isotropiska antagandet (men håller fast vid det linjära) får vi *anisotropi*. Vi behöver då alltså ta hänsyn till riktningarna. Ett elektriskt fält i ett material kommer alltså orsaka en polarisering som är proportionell mot fältstyrkan, men proportionaliteten kommer bero på vilken riktning i materialet vi betraktar. Då räcker det inte med att beskriva $\chi^e(x)$ som en funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, utan vi behöver en linjär avbildning (alltså en $(1,1)$-tensor eller 'matris', sådan att den kan ta en vektor (eller kovektor) och avbilda på en vektor(eller kovektor)), vars komponenter vi kan kalla $(\chi^e)^\alpha_\beta$. Då får vi alltså de tre ekvationerna:

$$P_j = (\chi^e)^k_j E_k \tag{50}$$

Och på sammas sätt för det magnetiseringen

$$M_j = (\chi^m)^k_j B_k \tag{51}$$

Om vi jämför dessa med det isotropa fallet ser vi att det isotropa fallet är ett specialfall sådant att $(\chi^e)^\alpha_\beta = 0$ för alla $\alpha \neq \beta$ och $(\chi^e)^\alpha_\beta = \chi^e$ för $\alpha = \beta$. De kan alltså helt enkelt beskrivas av den diagonala matrisen $\chi^e id_{\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3}$.

9.3.0 Bianisotropa, linjära material

Om vi nu låter P och M vidare bero av B respektive E kallas materialet för *bianisotropt*. Då får vi susceptibiliteter som vi delar upp i fyra delar. En del som beskriver det elektriska fältets inverkan på polarisationen, χ^{ee}, en del som beskriver det magnetiska fältets inverkan på polarisationen, χ^{em} respektive en del som beskriver det elektriska fältets inverkan på magnetiseringen, χ^{me} occh en del som beskriver det magnetiska fältets inverkan på magnetiseringen, χ^{mm}. De sex ekvationerna blir då:

$$P_j = (\chi^{ee})^k_j E_k + (\chi^{em})^k_j B_k \tag{52}$$

$$M_j = (\chi^{me})^k_j E_k + (\chi^{mm})^k_j B_k \tag{53}$$

9.4 Dispersiva material

Nu är det dags att ta det ett steg vidare och betrakta material vars egenskaper varierar i tiden.

9.4.0 Isotropa, linjära dielektrika med temporal dispersion

I ett *dielektriskt* material har vi ingen magnetisk växelverkan och konstitutiva relationerna kan skrivas som $P = P(E), \quad M = 0$. P beror alltså bara av E och M är 0. För att studera detta samband vidare inför vi några antaganden:

0. Lokal växelverkan. $P(x)$ beror av $E(x)$ och inte på E i någon annan händelse.
1. Linjaritet. För två fält, E_a, E_b gäller att $P = P(\alpha E_a + \beta E_b) = \alpha P(E_a) + \beta P(E_b)$. Detta gäller oftast för svaga fält.
2. Isotropi, så som det definierades tidigare.
3. Materialets egenskaper ändras inte med tiden. Funktionen $P = P(E)$ ser likadan ut oavsett när. Detta utesluter emellertid inte att materialet är inhomogent. Effekter så som temperaturutveckling i materialet försummas således.

Dessa antaganden rimliggör följande beskrivning av polarisationen:

$$P(t) = \int_{-\infty}^{t} \chi(t-\tau)E(\tau)\, d\tau \tag{54}$$

Polarisationen beror alltså på tidigare värden av det elektriska fältet, och materialet kallas *dispersivt*. Funktionen $\chi(t-\tau)$ kallas för *minnesfunktionen*, *susceptibilitetsfunktionen* eller *dispersionskärnan*.

Vi kan här notera att polarisationen beskrivs som en faltning mellan det elektriska fältet och minnesfunktionen, $P(t) = \chi(t) * E(t)$. Signalteoretiskt kan alltså relationen betraktas som ett linjärt system där $E(t)$ är insignalen, $P(t)$ är usignalen och $\chi(t)$ är systemets impulssvar.

9.4.1 Polarisationsprocesser av olika ordningar och optisk respons

Polarisation sker på olika nivåer, med olika snabba processer som ger olika stark effekt. Från snabbast till långsammast följer några exempel:

0. Intraatomär nivå. Elektronmolnet förskjuts relativt kärnan. Detta ger dipolmoment.
1. Interatomär nivå. Förskjutningar mellan atomer i en molekyl.
2. Vridningspolarisation. E utövar vridmoment på molekyler med permanent dipolmoment.
3. Ytpolarisation. Uppstår i material med inhomogeniteter.

I olika sammanhang kan de olika processerna ses som ögonblickliga. Vid studier av elnätet (50 Hz) kan alla effekter utom ytpolarisation ses som omedelbara. Vid studier inom mikrovågsområdet (typ 300 MHz – 300 GHz) kan inte vridningspolarisationen ses som omedelbar (tänk mikrovågsugnars inverkan på vatten). Inom det infraröda området (typ 1 THz – 385 THz) kommer interatomära effekter inte längra kunna ses som omedelbara. Inom ultravioletta studier (750 EHz –) måste man ta hänsyn till intraatomära effekter.

Om vi delar upp minnesfunktionen i en hastig och en trög, $\chi(t) = \chi_h(t) + \chi_t(t)$. Om vi betraktar den hastiga delens effekter som omedelbara kan vi skriva polarisationen som:

$$P(t) = \alpha E(t) + \int_{-\infty}^{t} \chi_t(t-\tau)E(\tau)\,d\tau \tag{55}$$

Där konstanten α kallas materialets *optiska respons*. Den beskriver de effekterna från polarisationsprocesser som anses omedelbara. Det konstitutiva sambandet mellan D och E uttryckt i dessa termer blir då:

$$D(t) = (1+\alpha)E(t) + \int_{-\infty}^{t} \chi_t(t-\tau)E(\tau)\,d\tau \tag{56}$$

Där vi alltså kan betrakta faktorn $1+\alpha$ som en omedelbar relativ permittivitet.

9.5 Modeller för minnesfunktionen

Härefter följer tre modeller för minnesfunktionen som har tillämpningar inom olika områden. *Lorentzmodellen* används på intra- och interatomär nivå. *Drudemodellen* används för ledande material. *Debyemodellen* beskriver vridningspolarisation. Dessa modeller beskrivs inte särskilt ingående matematiskt utan mer konceptuellt.

9.5.0 Lorentzmodellen

En atom betraktas som ett moln av laddningar runt en kärna vars massa är mycket större än elektronernas. En pålagd kraft förskjuter molnet men dess form behålls. Krafter vi får på laddningarna är den elektriska kraften från det yttre fältet, en kraft som vill dra tillbaka elektronerna (kan beskrivas som en harmonisk potential), och en friktionsliknande dämpande kraft som är proportionell mot elektronernas radiella hastighet. Rörelseekvationer ställs upp och ett dämpat harmoniskt system erhålles enligt formen:

$$\partial_t^2 r + \nu \partial_t r + \omega_0^2 r = -\frac{e}{m_e}E \tag{57}$$

Lösningarna blir på formen:

$$\chi(t) = \frac{\omega_p}{\sqrt{\omega_0^2 - \nu^2/4}} e^{-\frac{\nu t}{2}} sin(t\sqrt{\omega_0^2 - \nu^2/4}) \tag{58}$$

Där ω_0 beskriver den naturliga vinkelhastigheten, ν är dämpningen och $\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m_e}}$ kallas för *plasmafrekvensen* för materialet. e och m_e är elektronens laddning och massa och N antal elektroner per volymenhet.

Minnesfunktionen kommer alltså oscillera harmoniskt i tiden med en dämpning. Dämpningen, ν, kommer beskriva tidsskalan i materialet och huruvida det är underdämpat, kritiskt dämpat eller överdämpat. Kombinationen av ν och tidsskalan i studierna bestämmer om effekten kan anses omedelbar och alltså ersättas med en optisk respons eller inte.

9.5.1 Drudemodellen

Om vi bortser från den tillbakadragande kraften i lorentzmodellen, alltså ekvivalent med att sätta $\omega_0 = 0$, får vi drudemodellen. Lösningarna från ekvation 58 blir alltså på formen:

$$\chi(t) = \omega_0^2 \frac{1 - e^{-\nu t}}{\nu} \tag{59}$$

Denna modell blir alltså tillämpbar om laddningarna inte är bundna till några atomkärnor. Eftersom det inte finns någon återförenande kraft så kommer laddningarna att fortsätta flytta sig obegränsat och således växer P obegränsat. Därför är det rimligare att beskriva materialets respons på ett pålagt elektriskt fält med en strömtäthet, $J = \partial_t P$, som induceras av fältet i stället. Då får vi på motsvarande sätt en konduktivitet som är omedelbar och en som beror av tid, på samma sätt som vi fick susceptibiliteter förut.

$$J(t) = \chi_h(0)E(t) + \int_{-\infty}^{t} \chi_t(t-\tau)E(\tau)\, d\tau \tag{60}$$

$$J(t) = \sigma_0 E(t) + \int_{-\infty}^{t} \Sigma(t-\tau)E(\tau)\, d\tau \tag{61}$$

Där vi infört $\chi_h(0) = \sigma_0$ som är det omedelbara bidraget till konduktiviteten, och där minnesfunktionen, $\chi_t(t) = \Sigma(t)$ beskriver de tröga effekterna. Denna symbol kallas *konduktivitetskärnan*.

9.5.2 Debyemodellen

Debyemodellen är analog med lorentzmodellen förutom att vi beskriver rotationer av dipolmolekyler i stället för translationer av elektroner. Vridningspolarisation beskrivs på samma sätt med en rotationsrörelseekvation med tre momentkrafter. Momentet ifrån det pålagda elektriska fältet, det tillbakadrivande momentet och ett dämpande moment som är proportionellt mot vinkelhastigheten. Detta ger en ekvation på formen (jämför med ekvation 57):

$$\partial_t^2\theta + \nu\partial_t\theta + \omega_0^2\delta\theta = \frac{pE}{J}sin(\theta) \tag{62}$$

Där θ är vinkeln, $\delta\theta$ är förskjutningen i vinkeln från jämviktpunkt, ω_0^2 är den harmoniska vinkelhastigheten, p är dipolmomentets storlek och J är tröghetsmomentet. Löser vi den ekvationen får vi på samma sätt (jämför med ekvation 58) som förut en minnesfunktion:

$$\chi(t) = \frac{\omega_d^2}{\nu}[e^{-\frac{\omega_0^2}{\nu}t} - e^{-\nu t}] \tag{63}$$

Den andra exponentialtermen försvinner mycket fortare än den första och i debyemodellen försummas den och vi får

$$\chi(t) = \frac{\omega_d^2}{\nu}e^{-\frac{\omega_0^2}{\nu}t} \tag{64}$$

Där $\omega_d = \sqrt{\frac{2Np^2}{3J}}$, där N är volymtätheten av molekyler.

Att vi försummade en term i lösningen har först märkbara effekter vid optiska och ultravioletta effekter. Vid mikrovågor eller lägre har vi att debyemodellen kan ersättas med en optisk respons:

$$\alpha = \frac{\omega_d^2}{\omega_0^2} \tag{65}$$

10 Tidsharmoniska fält

Ett annat intressant specialfall med många tillämpningar är EM-fält som är harmoniska i tiden. Dessa kan beskrivas i termer av trigonometriska funktioner på formen $E(t, r) = E(r)cos(\omega t + \phi)$, där ω är fältets frekvens och ϕ är någon konstant fas. Det går ju som vanligt att superponera många sådana fält med varierande fas och frekvens. Om vi begränsar oss till en frekvens kallas fältet *monokromatiskt* (enfärgat alltså).

10.0 Monokromatiska fält

Givet en vinkelfrekvens, ω, har vi ett elektriskt fält som kan beskrivas med:

$$E(t, r) = E_0(r)cos(\omega t + \alpha(r)) \tag{66}$$

$E_0(r)$ och $\alpha(r)$ anger fältets amplitud och fas i varje punkt.

10.1 Polarisation hos monokromatiskt fält

För att definiera *polarisation* (förväxla inte med polarisationsfältet, P) måste vi välja en riktning. Låt oss välja z. Då kan vi beskriva det elektriska fältet i planet med normal i riktningen z som en summa av elfältet i riktningen x och elfältet i riktningen y:

$$E_{xy}(t, r) = E_{0,x}cos(\omega t + \phi_x) + E_{0,y}cos(\omega t + \phi_y) \tag{67}$$

Där den första termen i högerledet är fältet i x-led och den andra är fältet i y-led. Dessa kommer svänga harmoniskt i tiden med en fasförskjutning och med en konstant skilnnad i amplitud. Det resulterande fältet kommer, när det utvecklas i tiden, att följa en elliptisk bana i z-planet. Eccentriciteten av ellipsen bestäms både av förhållandet mellan $E_{0,x}$ och $E_{0.y}$ och skillnaden i fas, $\phi_y - \phi_x$.

10.1.0 Specialfall av polarisation

Om båda komponenterna ur ekvation 67 har samma fas, alltså $\phi_y - \phi_x = 0$ har vi ett specialfall av polarisation som kallas för *linjärt polariserat* monokromatiskt fält. Ellipsen är då en linje, vars lutning bestäms av förhållandet mellan $E_{0,x}$ och $E_{0.y}$.

Om båda komponenterna har samma amplitud men ligger ett kvarts varv ifrån varandra i fas, $|\phi_y - \phi_x| = \frac{\pi}{2}$, kallas fältet för *cirkulärt polariserat.* Ellipsen är då en cirkel.

10.2 Fältekvationerna för tidsharmoniska fält

Eftersom vi kan skriva ett tidsharmoniskt fält som en summa av fält på formen ekvation 66 kan vi skriva om till:

$$E = E_0(r)e^{i\omega t+\phi} \tag{68}$$

och

$$B = B_0(r)e^{i\omega t+\phi} \tag{69}$$

Dessa får tidsderivatorna

$$\partial_t E = i\omega E \tag{70}$$

respektive

$$\partial_t B = i\omega B \tag{71}$$

Om vi betraktar monokromatiska fält, alltså ω en bestämd konstant, då kan vi helt enkelt göra bytet $\partial_t \to i\omega$. Låt oss nu skriva om Maxwells ekvationer för monokromatiskt fält:

$$\begin{aligned} \nabla \times E &= -i\omega B \qquad & \nabla \times H &= J + i\omega D \\ \nabla \cdot D &= \rho & \nabla \cdot B &= 0 \end{aligned} \tag{72}$$

såväl som kontinuitetsekvationen:

$$\nabla \cdot J + i\omega\rho = 0 \tag{73}$$

Vågoperatorn (d'Alembert-operatorn) övergår i $-\partial_t^2 + \Delta \to \omega^2 + \Delta$. Det innebär att vågekvationerna för fälten blir Helmholtz-ekvationer:

$$(\Delta + \omega^2)E = \nabla\rho + i\omega J \tag{74}$$

$$(\Delta + \omega^2)B = -\nabla \times J \tag{75}$$

På samma sätt blir motsvarande ekvationer för potentialerna:

$$(\Delta + \omega^2)\Phi = -\rho \tag{76}$$

$$(\Delta + \omega^2)A = -J \tag{77}$$

10.3 Poyntings sats och energi i fältet för tidsharmoniska fält

För tidsharmoniska fält betraktar man sällan det omedelbara värdet för rörelsemängden utan snarare tidsmeledvärdet över en tid. Vi definierar Poyntings komplexa vektorfält som:

$$S_k = \frac{1}{2} E \times \overline{H} \tag{78}$$

Där vi har att tidsmedelvärdet blir:

$$\langle S_k \rangle = \frac{1}{2} Re\{E \times \overline{H}\} = \frac{1}{2} Re\{S_k\} \tag{79}$$

Vilket beskriver rörelsemängden i fältet. Vidare har vi:

$$\nabla \cdot S_k = -\frac{1}{2}[E \cdot \overline{J} + i\omega B \cdot \overline{H} - i\omega E \cdot \overline{D}] \tag{80}$$

Som beskriver hur energin förändras i en punkt. Realdelarna av högerledets tre termer motsvarar tidsmedelvärdet av energiflödena. Vi kan, precis som förut identifiera termerna. Den första termen är växelverkanstermen och beskriver hur laddningarnas energi i fältet ändras. Den andra och den tredje termen beskriver hur energin i fältet ändras. Vi kan skriva fälttermernas tidsmedelvärden som:

$$\langle W_e \rangle = \frac{1}{4} Re\{B \cdot \overline{H}\} \tag{81}$$

och

$$\langle W_m \rangle = \frac{1}{4} Re\{E \cdot \overline{D}\} \tag{82}$$

10.4 Konstitutiva relationer för monokromatiska fält

Minnesfunktionerna fouriertransformeras enligt (Kom ihåg att vi inte kan påverkas av händelser utanför den bakåtriktade ljuskonen och därför kommer integralmängden bara innehålla $\tau > 0$):

$$\chi(\omega) = \int_0^\infty \chi(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \tag{83}$$

$\chi(\omega)$ är en komplexvärd funktion för susceptibiliteten. På samma sätt som polarisationen tidigare, i tidsdomänen, gavs som en faltning har vi nu att den ges av en multiplikation:

$$P(\omega) = \chi(\omega) E(\omega) \tag{84}$$

De minnesfunktionerna som erhållits för modellerna ovan (lorentzmodellen, drudemodellen och debyemodellen) kan fouriertransformeras för att få motsvarande susceptibiliteter i frekvensdomänen.

10.4.0 Bianisotropa material för monokromatiska fält

Nu när vi gått från tidsdomänen till frekvensdomänen och faltningarna blivit till multiplikationer kan vi enkelt skriva upp de konstitutiva relationerna för bianisotropiska material:

$$P(\omega) = \chi^{ee}(\omega) \cdot E(\omega) + \chi^{em}(\omega) \cdot B(\omega) \tag{85}$$

$$M(\omega) = \chi^{me}(\omega) \cdot E(\omega) + \chi^{mm}(\omega) \cdot B(\omega) \tag{86}$$

Där susceptibiliteterna, χ^{ab}, ges av:

$$\chi^{ab}(\omega) = \int_0^\infty \chi^{ab} e^{-i\omega\tau} \, d\tau \tag{87}$$

Beräkningarna som krävs för att räkna ut P och M i termer av E och B blir relativt enkla eftersom inga faltningar behöver göras. Teorin kokar ned till linjära ekvationer.

11 Plana EM-vågor

Ett särskilt viktigt specialfall av tidsharmoniska fält är *plana vågor*. Dessa har en given *propagationsriktning*, som därför utgör ett naturligt val då vi diskuterar polarisation av plana vågor (det är ofta underförstått att polarisationen av en plan våg är med avseende på propagationsriktningen). Vi ska nu studera dem närmre. På samma sätt som vi för tidsharmoniska fält kunde göra bytet $\partial_t \to i\omega$ kan vi för plana vågor göra en liknande ersättning. Vi har från ekvationer 72 och **??** att vi kan skriva lösningar som:

$$\begin{aligned} E(r) &= E_0 e^{-ik\cdot r} & \qquad B(r) &= B_0 e^{-ik\cdot r} \\ D(r) &= D_0 e^{-ik\cdot r} & \qquad H(r) &= H_0 e^{-ik\cdot r} \end{aligned} \tag{88}$$

För dessa lösningar ser vi att $\nabla\cdot E(r) = -ik\cdot E(r)$, och att $\nabla\times E(r) = -ik\times E(r)$. Vi kan alltså göra bytet $\nabla \to -ik$. Maxwells ekvationer för plana vågor blir alltså helt algebraiska utan någon differentialoperator alls:

$$\begin{aligned} k\times E_0 &= \omega B_0 & \qquad k\times H_0 &= -\omega D_0 \\ k\cdot D_0 &= 0 & \qquad k\cdot B_0 &= 0 \end{aligned} \tag{89}$$

Vi kan nu stoppa in dessa ekvationer i varandra för att få fler samband:

$$\begin{aligned} \omega k\cdot B_0 &= k\cdot(k\times E_0) \\ &= E_0\cdot(k\times k) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{90}$$

och

$$\begin{aligned} \omega k\cdot D_0 &= -k\cdot(k\times H_0) \\ &= -H_0\cdot(k\times k) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{91}$$

11.0 Plana vågor i isotropa material

I ett isotropt material har vi som bekant $D = \epsilon E$ och $\mu H = B$. Nu använder vi våra algebraiska Maxwells ekvationer för att hitta ett förhållande mellan k och ω sådant att de uppfylls. Det handlar alltså att, givet ett material, hitta hur en våg rör sig i dem. Vi har:

$$
\begin{aligned}
k \times (k \times E_0) &= \omega k \times B_0 \\
&= \omega \mu k \times H_0 \\
&= -\omega^2 \mu D_0 \\
&= -\omega^2 \mu \epsilon E_0
\end{aligned} \tag{92}
$$

Den första termen kan skrivas om till $k(k \cdot E_0) - (k \cdot k)E_0$, men vi vet att $k \cdot E_0 = 0$, så till slut har vi:

$$
(k \cdot k - \omega^2 \mu \epsilon) E_0 = 0 \tag{93}
$$

Lösningen (utom den triviella $E_0 = 0$) ger oss

$$
k \cdot k = \omega^2 \mu \epsilon \tag{94}
$$

Som kallas för *dispersionsrelationen*. Den beskriver hur trögt fasen för en plan våg ändras för ett steg i rummet jämfört med ett steg i tiden.

11.1 Reflektion och transmission av plan våg

Vid ett gränssnitt mellan två material kommer den plana vågen bete sig på ett särskilt intressant sätt. För att sätta upp geometrin, låt oss betrakta en gränsyta vid $z = 0$, och en våg som faller in ifrån området $z < 0$. I området $z < 0$ kommer alltså finnas en infallande våg och en reflekterad våg medan i området $z > 0$ kommer det finnas en trasmitterad våg. Låt oss skriva vågorna som

$$
\begin{aligned}
E^{in}(r) &= E_0^{in} e^{-ik^{in} \cdot r} \\
E^{tr}(r) &= E_0^{tr} e^{-ik^{tr} \cdot r} \\
E^{re}(r) &= E_0^{re} e^{-ik^{re} \cdot r}
\end{aligned} \tag{95}
$$

Vi minns tillbaka att den tangentiella komponenten av det elektriska fältet måste bevaras när vi rör oss mellan två material (se ekvation 42). Vi skriver den tangentiella komponenten som $E_{tan}^{in}(r) = n_z \times E_0^{in} e^{-i(k_x^{in} x + k_y^{in} y)}$ (och motsvarande för reflekterad och transmitterad). Då kan vi ställa upp det tangientiella sambandet som:

$$
E_{tan}^{in} + E_{tan}^{re} - E_{tan}^{re} = 0 \tag{96}
$$

Detta ska gälla för varje punkt längs gränsytan. Detta leder till villkoret att de tangentiella komponenterna av samtliga vågvektrorer måste vara samma, k_{tan}. Vad som skiljer är nu alltså normalkomponenten av vågvektorerna, $k^{in} = k_{tan} + k_z^{in}$ och motsvarande för de andra. För ett isotropiskt material kan vi bestämma dessa från dispersionsrelationen (se ekvation 94) om materialegenskaperna är kända (låt oss säga att de är μ_a, ϵ_a för $z < 0$ och μ_b, ϵ_b för $z > 0$):

$$\begin{aligned} (k_z^{in})^2 &= (k_z^{re})^2 \\ &= \omega^2 \epsilon_a \mu_a - k_{tan}^2 \end{aligned} \tag{97}$$

$$(k_z^{tr})^2 = \omega^2 \epsilon_b \mu_b - k_{tan}^2 \tag{98}$$

Propagationsriktningens z-komponent måste vara motriktade för reflekterad och infallande våg, så de blir minus respektive plus $\sqrt{\omega^2 \epsilon_a \mu_a - k_{tan}^2}$. Den transmitterade måste ju fortsätta i det nya materialet så den blir plus $\sqrt{\omega^2 \epsilon_b \mu_b - k_{tan}^2}$.

För att göra beskrivningen enklare hädanefter så roterar vi vårt koordinatsystem så att k_{tan} ligger helt i y-riktningen. Alltså får k under inga omständigheter någon x-komponent. Planet som spänns av infallsriktningen och gränsytans normal kallas *infallsplanet* och efter vår rotation så väljer vi det till planet $x = 0$. För en vågvektor utan x-komponent kan vi skriva våra algebraiska ekvationer som:

$$\begin{aligned} k_{tan} E_x &= -\omega \mu H_z \\ k_z E_x &= \omega \mu H_y \\ k_{tan} E_z - k_z E_y &= \omega \mu H_z \end{aligned} \tag{99}$$

Och på samma sätt:

$$\begin{aligned} k_{tan} H_x &= \omega \epsilon E_z \\ k_z H_x &= \omega \epsilon E_y \\ k_{tan} H_z - k_z H_y &= \omega \epsilon E_z \end{aligned} \tag{100}$$

Vi noterar att vi kan sortera ekvationerna så att vi får två uppsättningar som inte kopplas av ekvationerna, $\{E_x, H_y, H_z\}$ och $\{H_x, E_y, E_z\}$. Vi kallar det första för det *transversellt elektriska* fallet (ofta kallat *TE*) och det senare för det *transversellt magnetiska* fallet (ofta kallat *TM*).

11.2 Reflektion och transmission av TE- och TM-våg

Kontinuitet av tangentialkomponent (jämför ekvation 42) ger:

(101) $$E_x^{in} + E_x^{re} - E_x^{tr} = 0$$

Eftersom tangentialdelen av vågvektorn bevaras så har vi att

(102) $$E_0^{in} + E_0^{re} - E_0^{tr} = 0$$

På samma sätt har vi (jämför ekvation 42 utan ytströmmar):

(103) $$H_Y^{in} + H_y^{re} - H_y^{tr} = 0$$

Här utnyttjar vi $k_z^{in} = -k_z^{re}$ och skriver om i termer av elfältet enligt ekvation 99 för att få sambandet:

(104) $$\frac{k_z^{in}}{\mu_a}(E_0^{in} - E_0^{re}) - \frac{k_z^{tr}}{\mu_b}E_0^{tr} = 0$$

Nu kan vi skriva *reflektionskoefficient* och *transmissionskoefficient* för TE-vågor:

(105) $$\begin{aligned} R_{TE} &= \frac{E_0^{re}}{E_0^{in}} \\ &= \frac{1-\gamma_{TE}}{1+\gamma_{TE}} \end{aligned}$$

Där vi infört den dimensionslösa koefficienten $\gamma_{TE} = \frac{k_z^{tr}\mu_a}{k_z^{in}\mu_b}$. R_{TE} beskriver alltså hur mycket av en infallande våg som reflekteras. På samma sätt kan vi ställa upp kvoten för transmissionen:

(106) $$\begin{aligned} T_{TE} &= \frac{E_0^{tr}}{E_0^{in}} \\ &= \frac{2}{1+\gamma_{TE}} \end{aligned}$$

Exakt samma förfarande leder till motsvarande ekvationer för TM-fallet:

(107) $$\begin{aligned} R_{TM} &= \frac{H_0^{re}}{H_0^{in}} \\ &= \frac{1-\gamma_{TM}}{1+\gamma_{TM}} \end{aligned}$$

Och

$$T_{TM} = \frac{H_0^{tr}}{H_0^{in}} = \frac{2}{1+\gamma_{TM}} \tag{108}$$

Med $\gamma_{TM} = \frac{k_z^{tr}\epsilon_a}{k_z^{in}\epsilon_b}$.

11.3 Brytningslag

Låt oss nu fundera på riktningar. Låt den infallande vågen bilda en vinkel, θ, med gränssnittets normal (z-riktningen) och låt alltjämt propagationen ske helt i planet $x = 0$. Då kan k^{in} beskrivas med en komponent i z-led och en i y-led. Utnyttjar vi dispersionsrelationen (ekvation 94) så har vi:

$$\begin{aligned} k_z^{in} &= \omega\sqrt{\epsilon_a\mu_a}\cos(\theta) \\ k_y^{in} &= \omega\sqrt{\epsilon_a\mu_a}\sin(\theta) \end{aligned} \tag{109}$$

Vi noterar att den tangentiella komponenten måste bevaras över gränsytan. Det innebär att y-komponenten måste ingå i den transmitterade vågvektorn med. Vi kan då ställa upp en ekvation för kvadraten av den transmitterade vågvektorn där vi återigen utnyttjar despersionsrelationen (ekvation 94):

$$\begin{aligned} (k^{tr})^2 &= \omega^2\epsilon_b\mu_b \\ &= (k_z^{tr})^2 + (k_y^{tr})^2 \end{aligned} \tag{110}$$

Vi sätter in den bevarade tangentiella komponenten som vi känner igen och får:

$$(k_z^{tr})^2 = \omega^2(\epsilon_b\mu_b - \epsilon_a\mu_a\sin^2(\theta) \tag{111}$$

Huruvida lösningarna blir reella beror av förhållandet $\sigma = \frac{\epsilon_b\mu_b}{\epsilon_a\mu_a\sin^2(\theta)}$. Om $\sigma > 1$ så får vi reella lösningar där vi (med samma resonemang som tidigare) väljer den positiva lösningen $k_z^{tr} = \omega\sqrt{\epsilon_b\mu_b - \epsilon_a\mu_a\sin^2(\theta)}$. I fallet $\sigma < 1$ har vi komplexa lösningar på formen $\pm i\omega\sqrt{-\epsilon_b\mu_b + \epsilon_a\mu_a\sin^2(\theta)}$, där vi väljer den negativa lösningen som vi kallar $-i\alpha$.

Låt oss betrakta det reella fallet. Den totala vågvektorn för den transimtterade vågen kan skrivas:

(112) $$k^{tr} = \omega\sqrt{\epsilon_b\mu_b}(\sin(\theta_{tr})n_y + \cos(\theta_{tr})n_z)$$

Där vi infört en ny vinkel, θ_{tr} som beskriver vinkeln av den transmitterade vågen från gränsytans normal. Om vi åter utnyttjar tangentialkomponentens bevarande över en gränsyta får vi förhållandet mellan infallande vinkel och transmitterad vinkel:

(113) $$\begin{aligned} k_{tan} &= k_y^{tr} \\ &= \omega\sqrt{\epsilon_b\mu_b}\sin(\theta_{tr}) \\ &= k_y^{in} \\ &= \omega\sqrt{\epsilon_a\mu_a\sin(\theta)} \end{aligned}$$

Så förhållandet blir:

(114) $$\sqrt{\epsilon_b\mu_b}\sin(\theta_{tr}) = \sqrt{\epsilon_a\mu_a\sin(\theta)}$$

Vilket kallas för *brytningslagen.*

Låt oss nu betrakta det komplexa fallet. Om $\epsilon_b\mu_b > \epsilon_a\mu_a$ så kommer σ vara större än 1 och k_z^{tr} är således reell för alla vinklar. Detta kallas att material b är *optiskt tätare* än material a. Om vi har det omvända får vi en vinkel, $\theta = \theta_k$ som kallas den *kritiska vinkeln.* För $\theta > \theta_k$ har vi att k_z^{tr} blir imaginär. Denna vinkel fås då σ går förbi 1, alltså vid:

(115) $$\theta_k = \arcsin\sqrt{\frac{\epsilon_b\mu_b}{\epsilon_a\mu_a}}$$

För vinklar över denna har vi att $k_z^{tr} = -i\alpha$, alltså helt imaginär. Vi räknar ut reflektionskoefficienten på samma sätt som förut och får:

(116) $$R_{TE} = \frac{1 + i\Delta_{TE}}{1 - i\Delta_{TE}} = e^{i\Phi_{TE}}$$

Där $\Delta_{TE} = \frac{\alpha\mu_a}{k_z^{in}\mu_b}$ och $\Phi_{TE} = 2\arctan(\Delta_{TE})$. Vi noterar att $|R_{TE}| = 1$ vilket innebär att ingen effekt kan gå in i material b, vågen totalreflekteras alltså. Emellertid får vi en fasförskjutning Φ_{TE} som kallas för *Goos-Hänchens fasskifte.* Samma förfarande för TM-fallet ger totalreflektion med fasförskjutning $\Phi_{TM} = 2\arctan(\frac{\alpha\epsilon_a}{k_z^{in}}\epsilon_b)$.

11.4 Brewsters vinkel

Om materialet tillåter finns en vinkel, θ_B, för vilken ingenting reflekteras utan hela vågen transmitteras, denna vinkel kallas för *Brewsters vinkel*.

Vi betraktar reflektionskoefficienten för TE-fallet (ekvation 105) och ser att villkoret för att ingen effekt ska reflekteras är $\gamma_{TE} = 1$ vilket ger:

$$\epsilon_a k_z^{tr} = \epsilon_b k_z^{in} \tag{117}$$

Vi ställer normalkomponenterna av vågvektorerna för denna vinkel mot varandra:

$$k_z^{in} = \omega\sqrt{\epsilon_a\mu_a}\cos(\theta_B), \quad k_z^{tr} = \omega\sqrt{\epsilon_b\mu_b}\cos(\theta_{tr}) \tag{118}$$

Så:

$$\cos(\theta_{tr}) = \sqrt{\frac{\epsilon_b\mu_a}{\epsilon_b\mu_a}}\cos(\theta_B) \tag{119}$$

Använder vi tangentialkomponenten (som ju bevaras), $k_{tan} = \omega\sqrt{\epsilon_a\mu_a}\sin(\theta_B) = \omega\sqrt{\epsilon_b\mu_b}\sin(\theta_{tr})$ så kan vi eliminera θ_{tr} och få:

$$\theta_B = \arcsin(\sqrt{\frac{\epsilon_b(\epsilon_a\mu_b - \epsilon_b\mu_a)}{(\epsilon_a^2 - \epsilon_b^2)\mu_a}}) \tag{120}$$

För TM-polarisation finns alltid brewstervinkeln om $\mu_a = \mu_b$ men aldrig om $\epsilon_a = \epsilon_b$. För TE-fallet gäller det omvända. Brewsters vinkel kallas därför även för *polarisationsvinkeln*.

11.5 Infallande plan våg mot ledande yta

Vi avslutar med ett specialfall av särskilt intresse för kommande studier, nämligen fallet då en plan våg faller in från tomrum mot en ledande yta. Låt geometrin vara så som tidigare exempel. Material a är tomrum och således har vi $\epsilon_a = 1$ och $\mu_a = 1$. Låt material b vara ett ledande material med konduktivitet σ, relativ permittivitet ϵ_r och relativ permeabilitet $\mu_r = \mu_b$ som därför har förluster. Vi får att permittiviteten i material b blir $\epsilon_b = \epsilon_r - i\sigma/\omega$.

Från dessa materialegenskaper kan vi skriva kvadraten av normalkomponenten av den transmitterade vågens vågvektor som:

$$(k_z^{tr})^2 = k_0^2[\mu_b(\epsilon_r - \frac{i\sigma}{\omega}) - \sin^2(\theta)] \tag{121}$$

k_z^{tr} får alltså real- och imaginärdelar enligt $k_z^{tr} = \beta - i\alpha$ där både α och β måste vara positiva och uppfylla:

$$\begin{aligned} \beta^2 - \alpha^2 &= k_0^2(\epsilon_r\mu_b - \sin^2(\theta)) \\ 2\alpha\beta &= k_0^2\frac{\sigma\mu_b}{\omega} \end{aligned} \tag{122}$$

Utan att gå vidare matematiskt kan vi notera att dämpningen sker i normalriktningen.

Detta får avsluta denna introduktion till elektrodynamik med några praktiska specialfall.

A Notation och definitioner

Notationen följer den i [Fur22c].

A.0 Storheter

Ingen typografisk skillnad görs mellan storheter av olika dimensioner. Läsaren förväntas förstå vad som försigår.

För allmäna händelser i rumtiden används ofta symbolen x, så att en funktion, f, som beror av både tid och rum får värdet $f(x)$ i den händelsen. För enbart rum används ofta r och för enbart tid, t.

Enhetsvektorer betecknas vanligtvis med n, ibland med ett index som indikerar att vektorn pekar i en koordinataxels ökande riktning, så som exempelvis n_z.

B Förkunskaper

Kapitel som är markerade med ¤ får anses kräva matematisk mognad långt utöver vad som fordras för resten av artikeln.

B.0 Naturfilosofi

Läsaren bör ha åtminstone grundläggande kunskap inom

- ⋆ Klassisk mekanik (se exempelvis [Kra03a] och [Kra03b])

För avsnitt markerade med ¤ bör läsaren även vara bekväm med

- ⋆ Analytisk mekanik (se exempelvis [Per10])
- ⋆ Relativitetsteori (se exempelvis [Sch50] och [Whe73])

B.1 Matematik

Läsaren bör ha åtminstone grundläggande kunskap inom

- ⋆ Linjär algebra (se exempelvis [Gus13])
- ⋆ Analys (typ $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^\delta$, se exempelvis [Lar05a], [Lar05b] och [Ced13])
- ⋆ En smula fourieranalys (se exempelvis [Fol09])
- ⋆ Geometri (se exempelvis [Ced13])
- ⋆ För avsnitt markerade med ¤ bör läsaren även vara bekväm med
  - ℘ Multilinjär algebra (se exempelvis [Gre78])
  - ℘ Differentialgeometri (i synnerhet Riemannsk geometri, se exempelvis [Fol08], [Sch50] och [Wei72])
  - ℘ Yttre algebra (se exempelvis [Dar94])
  - ℘ Variationskalkyl (se exempelvis [Mag05] och [Sch95])

C Vidare läsning

Den intresserade läsaren kan såklart ta vid och läsa de böcker som författaren själv stöttat sig på under skrivandet av denna artikel. För elektrodynamiken i allmänhet användes främst [Nor], [Jac62], [Che89], [Gri99] och [Hec15]. För de mer matematiskt inriktade delarna användes även [Ced13], [al01], [Fol09], [Gre78], [Dar94] och [Mag05]. För delarna om vågrörelse användes även [Agr97] och [Col92].

Läsaren uppmuntras att även läsa nästa del i serien, [Fur22a].

D ¤ Analogi mellan gravitation och elektrodynamik

Låt oss betrakta lagrangianen för Newtons teori för gravitation:

$$\mathcal{L}_{grav} = -\frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 - \rho\Phi \tag{123}$$

Där Φ är den gravitationella potentialen och ρ är masstätheten. Låt oss variera detta med avseende på potentialen. Vi får (efter partiell integration där yttermen försummades) villkoret:

$$-\rho + \Delta\Phi = 0 \tag{124}$$

Detta känner vi igen som analogt med Gauss lag (se ekvation 36 där vi har $\rho = \nabla \cdot E = \Delta\Phi$).

Tar vi nu tidsderivatan av detta villkor får vi:

$$-\partial_t\rho + \partial_t\Delta\Phi = 0 \tag{125}$$

Låt oss nu sätta in materians bevarande, kontinuitetsekvationen vi kan beskriva med en ström av massa (med andra ord en rörelsemängd), J:

$$\partial_t\rho - \nabla \cdot J = 0 \tag{126}$$

Då får vi:

$$\nabla \cdot J = \partial_t\Delta\Phi \tag{127}$$

$$\nabla \cdot J = \nabla \cdot (\partial_t\nabla\Phi) \tag{128}$$

$$J - \partial_t\nabla\Phi = 0 \tag{129}$$

Denna ekvation bör påminna om Ampères lag (se ekvation 36) fast utan en term. Analogier så som denna är mycket kraftfulla för en djup förståelse för teorin.

Referenser

[Fur22a] Anders Furufors. *Elektromagnetiska fält, vågledare och antenner, Del II: Vågledare och antenner*. 2022.

[Fur22b] Anders Furufors. *Elektromagnetiska fält, vågledare och antenner, Del III: Informationsbärande signaler i vågledare och antenner*. 2022.

[Jac62] David Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, 1962.

[Fur22c] Anders Furufors. *Matematisk introduktion*. 2022.

[Kra03a] Meriam och Kraige. *Engineering Mechanics: Statics*. Wiley, 2003.

[Kra03b] Meriam och Kraige. *Engineering Mechanics: Dynamics*. Wiley, 2003.

[Per10] Martin Cederwall och Per Salomonson. *An Introduction to Analytical Mechanics*. Institutionen för fundamental fysik, Chalmers, 2010.

[Sch50] Erwin Schrödinger. *Struktur der Raum-Zeit*. Cambridge Science Classics, 1950.

[Whe73] Misner och Wheeler och Thorne. *Gravitation*. Princeton University Press, 1973.

[Gus13] Ivar Gustafsson. *Linjär algebra och numerisk analys*. Institutionen för matematik, Chalmers, 2013.

[Lar05a] Arne Persson och Lars-Christer Böiers. *Analys i en variabel*. Studentlitteratur AB, 2005.

[Lar05b] Arne Persson och Lars-Christer Böiers. *Analys i flera variabel*. Studentlitteratur AB, 2005.

[Ced13] Martin Cederwall. *En första kurs i matematisk fysik*. Institutionen för fundamental fysik, Chalmers, 2013.

[Fol09] Gerald Folland. *Fourier Analysis and Its Application*. American Mathematical Society, 2009.

[Gre78] Werner Greub. *Multilinear Algebra*. Springer Verlag, 1978.

[Fol08] Gerald Folland. *Quantum Field Theory: A Tourist Guide for Mathematicians*. American Mathematical Society, 2008.

[Wei72] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology*. Wiley, 1972.

[Dar94] Richard Darling. *Differential Forms and Connections*. Cambride University Press, 1994.

[Mag05] Michele Maggiore. *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*. Oxford University Press, 2005.

[Sch95] Peskin och Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. CRC Press, 1995.

[Nor] Martin Norgren. *Kompendium i elektromagnetisk fältteori, 2H1250*. Avdelningen för teoretisk elektroteknik, Alfvénlaboratoriet, KTH.

[Che89] David Cheng. *Field and Wave Electromagnetics*. Addison-Wesley, 1989.

[Gri99] David Griffith. *Introduction to Electrodynamics*. Cambridge University Press, 1999.

[Hec15] Eugene Hecht. *Optics*. Pearson, 2015.

[al01] Eriksson et al. *Fysikens matematiska metoder*. KTH, 2001.

[Agr97] Govind Agrawal. *Fiber-Optic Communication Systems*. Wiley, 1997.

[Col92] Robert Collin. *Field Theory of Guided Waves*. McGraw-Hill, 1992.