

Allmän relativitet

Grundläggande formulering av teorin för matematikentusiaster

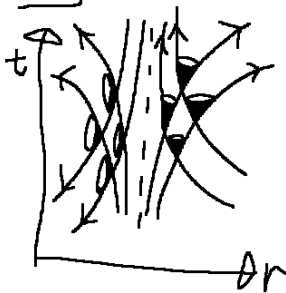
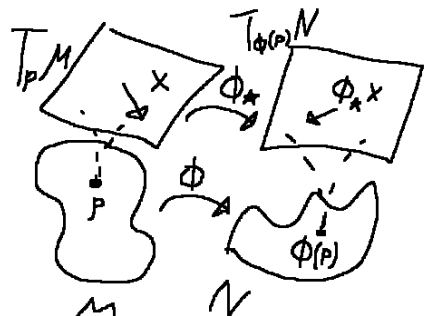
Anders

23 september 2024

Sammanfattning

Häri beskrivs teorin för allmän relativitet med tillämpningar på ett grundläggande och chosofritt vis med fokus på att göra lärandet kul för den matematiskt intresserade.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}[R - 2\Lambda] = 8\pi G_N T_{\mu\nu}$$

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - F^\mu \right] = 0$$



$$\nabla_{V_j} V_j = 0$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = -\frac{\ddot{y}^\alpha}{\dot{y}^\mu \dot{y}^\nu}$$

*Kunde Euklides nånsin tro
 Att rätta linjens form skulle bero
 Av vad för massa som fanns nära
 Står det att finna i hans lära?*

*Utan att det riktigt själv förstå
 Hade greken mycket rätt ändå
 Linjen transporteras parallellt
 Det är så det sägs, formellt*

*Men han kunde aldrig ana
 Att månens runda bana
 Tangent till himmelens blåa tak
 Egentligen var ganska rak*

Innehåll

I: Matematiskt ramverk	0
0 Lektion: topologi och glatta mångfalder	1
0.0 Mål	1
0.1 Topologi	1
0.2 Mångfalder	2
0.3 Kartor	3
0.4 Glatta mångfalder	4
1 Lektion: kurvor, hastigheter och tangentrum	7
1.0 Mål	7
1.1 Kurvor	7
1.2 Hastighet	7
1.3 Tangentrum	9
1.4 Duala tangentrummet	10
2 Lektion: fält, krökning och förbindelser	13
2.0 Mål	13
2.1 Tvärsnitt på fiberknippen	13
2.2 Kotangentknippe	15
2.3 Förbindelser	15
2.3.0 Algebraisk väg till förbindelsen	15
2.3.1 Geometrisk väg till förbindelsen	16
2.4 Kovariant derivata	18
2.5 Kovariant derivata av kovektorfält	19

3	Lektion: geodeter, torsion och mått på krökningen	21
3.0	Mål	21
3.1	Riemann-Christoffel-tensorn, ett mått på krökningen	21
3.1.0	Geometrisk bild	21
3.1.1	Algebraisk bild	22
3.1.2	Torsion	24
3.1.3	Symmetrier hos Riemann-Christoffel-tensorn	24
3.2	Geodeter - raka kurvor	25
3.3	Omparametrisering av geodeter	26
3.4	Metrik längs geodeter	27
4	Lektion: tensorer, metrik och stationära kurvor	29
4.0	Mål	30
4.1	Tensorprodukt	30
4.2	Utflykt: isärtagbara tensorer	31
4.3	Metrik	31
4.4	Metrisk signatur	33
4.5	Ljuskoner	33
4.6	Tidsriktning	34
4.7	Metrisk förbindelse	36
4.7.0	Metrisk kompatibilitet genom parallelltransport	36
4.7.1	Metrisk kompatibilitet med stationära kurvor	38
4.7.2	Metrisk förbindelse	41
5	Lektion: integraler och densiteter	43
5.0	Mål	43
5.1	Integral av skalära fält	43
5.2	Byte av variabler under integral	44
5.3	Volymformer, orientering och densiteter	44
5.4	Integral över en kartdomän	48
5.5	Integral över hela mångfalden	49
II:	Fysik	50
6	Lektion: materia och rörelsemängd	51
6.0	Mål	51
6.1	Återblick över strukturen	51
6.2	Energi och rörelsemängd	51
6.3	Massa	53
6.4	Verkansprincipen och Noethers sats	54
6.5	Härledning av SEM-tensorn givet en teoris symmetri	55
7	Lektion: allmän relativitetsteori	57
7.0	Mål	57
7.1	Första ansats	57
7.2	Hilberts ansats	58
7.3	Variation av Hilberts verkan	59
7.4	Tillägg av materia till Hilberts verkan	62
7.5	Fältekvationerna	63
7.6	Gravitationell konstant	64

III: Tillämpningar	66
8 Lektion: newtonska gränsen, rödskifte och tvillingproblemet	67
8.0 Den Newtonska gränsen	67
8.1 Gravitationellt rödskifte	70
8.2 Tvillingproblemet	71
9 Lektion: svarta hål	74
9.0 Schwarzschild-metriken	74
9.1 Svarta hål, utsidan	77
9.2 Svarta hål, insidan	79
10 Lektion: visualisering av rumtid och svarta hål	82
10.0 Radiella ljuslika geodeter	82
10.1 Eddington-Finkelstein-koordinater	83
10.2 Kruskal-koordinater	85
10.3 Penrose-diagram	88
10.4 Minkowski-metrik i Penrose-diagram	89
10.5 Schwarzschild-metrik i Penrose-diagram	91
10.6 Gravitationell kollaps i Penrose-diagram	91
11 Lektion: exotiska svarta hål	95
11.0 Reissner-Nordström-metriken	95
11.0.0 Fall: $m^2 < p^2 + q^2$	96
11.0.1 Fall: $m^2 > p^2 + q^2$	96
11.0.2 Fall: $m^2 = p^2 + q^2$	97
11.1 Kerr-metriken	97
11.2 Kerr-Newman-metriken	97
12 Lektion: satellitnavigation, Mercurius precession och gravitationella linser	101
12.0 Satellitnavigation	101
12.1 Tidslika geodeter i Schwarzschild-metriken	102
12.2 Mercurius precession	104
12.3 Gravitationella linser	107
13 Lektion: gravitationella vågor	111
13.0 Vågekvationen	111
13.1 Linjär approximation för rumtiden	111
13.2 Gravitationella vågor	114
13.3 Polarisering av gravitationella vågor	114
13.4 Geodeter i gravitationella vågor	116
14 Lektion: kosmologi	119
14.0 Kosmos	119
14.1 Expansion	119
14.2 Universums ålder	120
14.3 Den kosmologiska konstanten, Λ	120
14.4 Universums utveckling, den tidiga epoken	121
14.4.0 Antaganden	121
14.4.1 Einstein-tensorn	122

14.4.2	Materia i homogent och isotropt universum	122
14.4.3	Test av vår ansats	123
14.5	Modeller för vätskor	123
14.5.0	Lösningar	124
14.6	Universums utveckling, den senare epoken	125
14.6.0	Densitetsparametrar	125
14.6.1	Dominerande materiemodell under universums utveckling	126
14.7	Ett sent universum	126
14.7.0	Krökningsregioner	126
14.7.1	Accelerationsregioner	127
14.7.2	Återkollaps	127
14.8	Mätningar, mörk materia och energi	127
IV:	Fördjupning	130
15	Extralektion: matematisk fördjupning	131
15.0	Härledning av Euler-Lagranges ekvationer	131
15.1	Noethers sats	133
15.1.0	SEM-tensorn	135
15.1.1	Elektrisk ström	136
15.2	Palatinis identitet	137
15.3	Mer om mångfalder och knippen	139
15.3.0	Delmångfalder	139
15.3.1	Framåtskjutningar och tillbakaryckningar	140
15.3.2	Inducerad metrik	143
15.3.3	Inbäddningar, nedsänkningar och inlevelser	144
15.4	Flöden	147
15.5	Lie-grupper och Lie-algebra	148
15.5.0	Strukturkonstanter	151
15.6	Lie-derivata	152
15.7	Metrisk symmetri och Killing-vektorfält	153
A	Notation och konventioner	157
A.0	Linjär algebra	157
A.0.0	Indices	158
A.1	Derivator	158
A.2	Fältteori	159
A.3	Metrik och båglängd	159
A.4	Kurvor	160
B	Vidare läsning	161
B.0	Bakomliggande matematik	161
B.1	Teorin i allmänhet	161
B.2	Rumtiden	161
B.3	Tillämpningar	161
B.4	Avancerad fördjupning	161
	Referenser	162

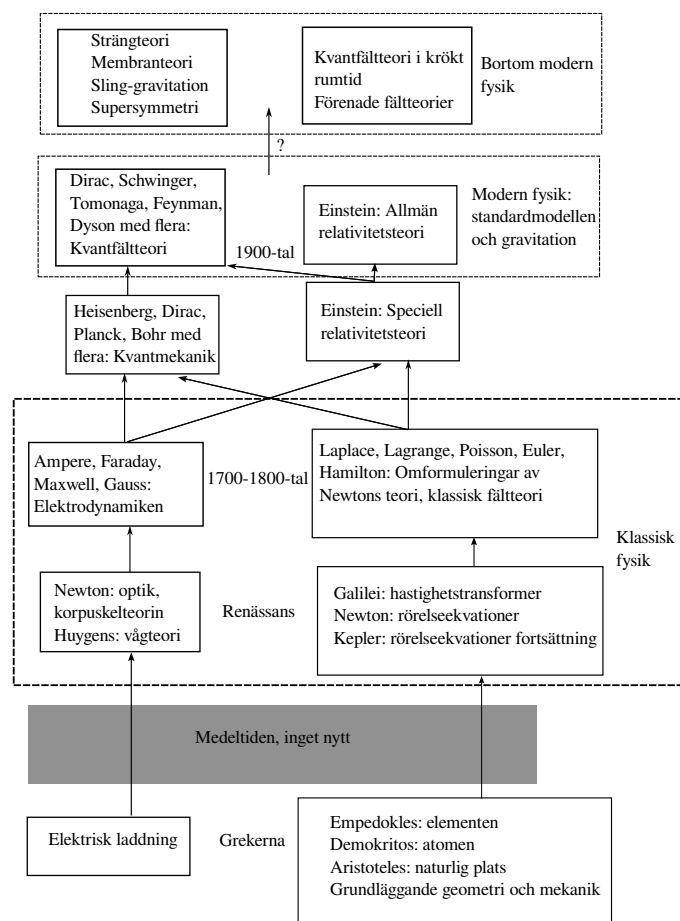
Bakgrund

Den allmänna relativitetsteorin är, sedan dess publicering 1915 e.Kr. och ännu vid denna lektionsseries publikation, den bästa förklaringen för gravitation som formulerats. Teorin har inte genomgått några förändringar utan var fulländad från början. Det är ett måste för varje naturfilosof att ha en djup förståelse för den allmänna relativitetsteorins principer.

Vi har att göra med en högestetisk teori. En teori som binder samman två till synes helt olika företeelser, nämligen materia och rummet själv som innehåller den. Teorin ställer upp ett samband mellan så skilda ting som rörelsemängd, massa och energi på ena sidan ett likhetstecken, och på den andra sidan finner vi hur en klocka saktas ned, hur en linjal förkortas och hur en rak linje kan bli till en precesserande elliptisk omloppsbana kring en tung kropp.

För matematikentusiasten innebär allmän relativitet en chans att bekanta sig med multilinjär algebra, yttre algebra och differentialgeometri. Det blir ett äventyr bland tensorprodukter av glatta tvärsnitt över fiberknippen. Bland Lie-derivator längs hastigheten av flöden. Bland förbindelser, torsion och metrisk kompatibilitet. Får inte missas.

För att sätta allmän relativitetsteori i ett sammanhang är det lättast att betrakta fysikens utveckling och nuvarande tillstånd. Detta återges i figur 0.



Figur 0: Skiss över fysikens utveckling. Mekaniska teorier utvecklades parallellt med elektromagnetiska. Så småningom förenades de på 1900-talet. Den moderna fysiken är uppdelat i en teori som behandlar allt utom gravitation och en teori som enbart behandlar gravitation. De två går inte att förena. Försök att förena dem, antingen förklara gravitation inom kvant-teorier (rutan överst till vänster) eller försök att få in kvantteorier i den krökta rumtiden (rutan överst till höger), har hitintills dessvärre misslyckats.

Grovt upplägg

Lektionerna är grovt sett uppdelade i tre delar med tre olika mål i fokus. Matematiska strukturen byggs på efterhand som den behövs. Varje lektion inleds med ett motiverande avsnitt där målen för lektionen sätts upp och ett sammanhang ges.

Första målet: rita världslinjer på rumtiden

Vi vill undersöka hur saker rör sig på grund av relativistiska effekter. För att kunna göra det behöver vi kunna rita deras *världslinjer* i rumtiden. Detta kräver en del matematik, så mycket att vi inte kommer in på någon fysik alls i hela delen.

Andra målet: binda samman rumtid med materia

Här börjar fysiken. Vi vill se hur materien och rörelsemängden, T , påverkar rumtiden, *kröker* den. Här kommer fysiken alltså in. Målet med delen är att uttrycka Einsteins fältekvationer.

Tredje målet: undersöka konsekvenser av teorin

Vid det här laget är teorin fullständig i och med fältekvationerna. Målet med denna del blir i stället att undersöka teorins konsekvenser i form av svarta hål, gravitationsvågor och liknande.

Extralektion: Matematisk fördjupning

Efter kursen ges en extralektion som går in på djupet i de matematiska delarna. Däri härleds Euler-Lagranges ekvationer, Noethers sats och en hel del om differentialgeometri så som inbäddningar, bakåtryckningar, Lie-derivator och mer.

I: Matematisk ramverk

0 Lektion: topologi och glatta mångfalter

Vi börjar som man alltid gör, med grekerna.

En punkt är vad som icke har delar.

Euklides

Rumtiden är vad vi egentligen vill utgå från. Det är just en samling punkter som vi tar för *atomära*. Vi kallar en samling för mängd.

Det sagt så blir det nog en del repetition av grunderna till att börja med. Läsaren antas ha litet koll, annars finns goda böcker att läsa.

0.0 Mål

Vi vill beskriva rummet och tiden, *rumtiden*, omkring oss, och för det vill vi parallellt bygga upp en matematisk struktur för den.

Vi utgår från att samla alla punkter i en *mängd*. Vi inser att saker omkring oss antingen hänger ihop eller ej, och denna *kontinuitet* beskriver vi med en *topologi*. Exempelvis kan man tänka sig att punkterna som ett bord finns i hänger samman med varandra, medan punkterna som taklampan finns i inte hänger ihop med dem, utan bildar sin egen sammanhängande delmängd.

Vi ser också att vi kan avbilda små regioner av rumtiden på ett *euklidiskt rum* på ett *kontinuerligt* vis och tvärt om. Detta beskrivs matematiskt av strukturen *mångfald*, som är ett villkor på topologin.

Dessa avbildningar kallar vi för *kartor* och vi vill använda dem för att skapa en *glatt struktur* på mångfalden. Vi vet ju redan hur vi deriverar i euklidiska rum, så vi försöker att definiera den med avseende på kartor. Resultatet blir en samling av kartor som är kompatibla med derivator, en *glatt atlas*.

I lektionen bygger vi upp de matematiska strukturerna som krävs för en *glatt mångfald*, för det är så vi vill börja med att beskriva rumtiden. I resten av lektionen kommer inga referenser till rumtiden göras utan allt presenteras på en allmän och rent matematisk nivå.

0.1 Topologi

Låt oss tänka oss en mängd, M . Mängdens element har ingen inbördes relation, men vi kommer vilja ha en sådan. Ett av de grövsta sätten att definiera inbördes relationer mellan elementen är med något som kallas för en *topologi* på M .

Definition 0 (Topologi, öppen mängd, topologisk mängd)

En delmängd av potensmängden till en mängd, $\mathcal{O} \subseteq \wp(M)$, kallas för en *topologi* på M om den uppfyller tre villkor.

0. $\emptyset \in \mathcal{O}, \quad M \in \mathcal{O}$
1. $U \in \mathcal{O}, V \in \mathcal{O} \implies U \cap V \in \mathcal{O}$
2. $U_\alpha \in \mathcal{O} \implies \bigcup_\alpha U_\alpha, \alpha \text{ i någon indexmängd.}$

Element ur $\mathcal{O}$ kallas **öppna mängder** med avseende på en given topologi. Paret av en mängd och dess topologi, $(M, \mathcal{O})$, kallas för en **topologisk mängd**. $\boxtimes$

Vi kan omedelbart känna igen två topologier vi alltid kan skapa, $\mathcal{O}_{\text{chaos}} = \{M, \emptyset\}$, som kallas för den *kaotiska topologin* (ibland för den indiskreta) och $\mathcal{O}_{\text{diskret}} = \wp(M)$, som kallas för den *diskreta topologin*.

Med en metrik kan vi inducera en topologi genom att betrakta mjuka bollar som *öppna* (det betyder element ur topologin) och därmed unioner och snitt mellan dem enligt ovan definition. En sådan metrikinducerad topologi är vi vana med på $\mathbb{R}^d$, där metriken är den bekanta euklidiska ($g = \sum dx^\mu \otimes dx^\mu$).

Topologier definierar punkters *omgivning*, vilket ger en inbördes relation mellan elementen i den topologiska mängden.

Definition 1 (Omgivning)

Givet en topologisk mängd, $(M, \mathcal{O})$, och ett element, p , i denna så kallas en delmängd $N \subseteq M$ för en **omgivning** till p om det existerar en delmängd, $G \subseteq N$, sådan att $G \in \mathcal{O}$ och $p \in G$. $\boxtimes$

Anmärkelse. En delmängd av en topologisk mängd kallas alltså *omgivning* till en punkt om den har en öppen delmängd däri punkten är ett element. I den här kursen är vi enbart intresserade av omgivningar som själva är öppna, alltså öppna omgivningar.

Mer än så behöver vi inte gå in på topologi. Varför studera topologi? Det ger oss ett begrepp om *kontinuitet* som vi så småningom behöver för *deriverbarhet* som vi i sin tur behöver för att kunna tala om *glatta* funktioner.

Definition 2 (Kontinuitet)

En funktion, $f : M \rightarrow N$, mellan två topologiska mängder, $(M, \mathcal{O}_M)$ och $(N, \mathcal{O}_N)$, är **kontinuerlig** (med avseende på dessa två topologier) om

$$V \in \mathcal{O}_N \implies \text{preim}_f(V) \in \mathcal{O}_M$$

$\boxtimes$

0.2 Mångfalder

Nu är vi redo för att definiera *mångfald*.

Definition 3 (Homeomorfi)

En avbildning som är en kontinuerlig bijektion med kontinuerlig invers kallas för en **homeomorfi** med avseende på topologierna för definitionsmängden och värdemängden. $\boxtimes$

Definition 4 (Mångfald av dimension d)

En topologisk mängd, $(M, \mathcal{O})$, kallas för **mångfald** om det för varje element, $p \in M$, finns en öppen omgivning, $U \in \mathcal{O}$, till p , som är homeomorf med en öppen mängd i $\mathbb{R}^d$ [†]. **Dimensionen** av mångfalden sägs då vara d . $\boxtimes$

Anmärkelse. Ibland ställs ytterligare två villkor, som vi här har uteslutit (dels för att de inte alltid ställs, och dels för att topologiska mängder vi är intresserade av ändå uppfyller dem)

- ★ $(M, \mathcal{O})$ är *Hausdorff*, vilket innebär att det ska finnas omgivningar runt distinkta punkter med tomt snitt
- ★ $(M, \mathcal{O})$ är *parakompakt*, vilket innebär att varje öppet täcke har en öppen förfining som är lokalt ändlig, men det här är ingen bok om topologi

Vi tar i den här kursen dessa två villkor som uppfyllda för alla mångfalder vi är intresserade av.

Kanske aningen krångligt men essensen är typ: det finns ingen större struktur i en mångfald än att dess element har en inbördes relation med de element som, på topologisk nivå, ligger nära. I den topologiska närheten av varje punkt liknar mångfalden det euklidiska rummet. Notera dock att vi inte kan säga mer än så. Vi har inga operationer på mångfalden. Det är inte meningsfullt att addera punkter eller försöka mäta avståndet mellan dem (annat än på en topologisk nivå).

0.3 Kartor

Vi ska försöka utnyttja att mångfalden lokalt ser ut som ett euklidiskt rum genom att skapa, eventuellt överlappande, funktioner mellan mångfalden och delmängder av det euklidiska rummet. Dessa funktioner kallar vi för *kartor*.

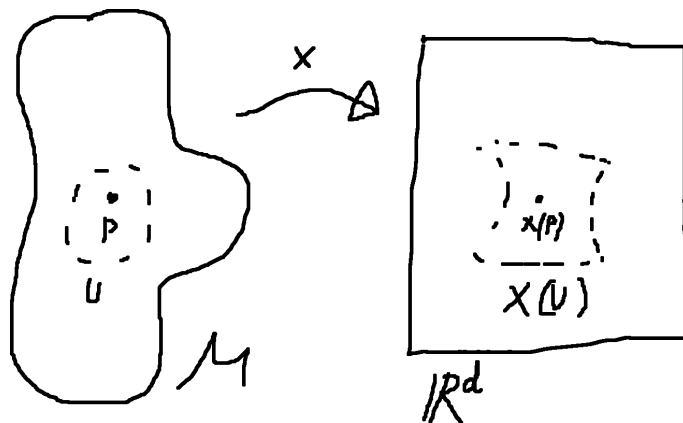
Definition 5 (Karta)

Givet en mångfald, $(M, \mathcal{O})$ kallas en homeomorfi, $x : U \rightarrow x(U) \subseteq \mathbb{R}^d$, tillsammans med sin definitionsmängd, $U \in \mathcal{O}$, alltså (U, x) för en **karta** på mångfalden. $\boxtimes$

Se figur 1 för en schematisk skiss.

Vi ska här akta oss för att tro att detta inducerar några operationer på mångfalden. Givet en karta, (U, x) , på en mångfald, $(M, \mathcal{O})$, så kan vi exempelvis inte

[†]Där det är underförstått att vi alltid, såvitt inget annat anges, är standardtopologin som gäller där, alltså den som induceras av mjuka bollar med avseende på en euklidisk metrik.



Figur 1: Karta, x , som avbildar en öppen omgivning, $U \subseteq M$, till p på en öppen mängd, $x(U) \subseteq \mathbb{R}^d$.

addera två punkter, $p, q \in M$ genom att ta något i stil med $x^{-1}(x(p) + x(q))$ även om $x(p) + x(q) \in x(U)$. En sådan operation skulle sakna mening på mångfalden eftersom den inte är väldefinierad. Ett byte av karta skulle innebära att samma operation skulle ge en annan punkt. Det finns dock tillfällen då vi kan göra detta för infinitesimala additioner på kartan. Detta sker då under mycket speciella omständigheter och vi kommer använda det så småningom då vi undersöker kurvors längd under variationer för att finna stationära sådana.

0.4 Glatta mångfalder

Vi har inget begrepp om derivator på mångfalden. Vi minns däremot från skoltiden hur man deriverar funktioner mellan olika euklidiska rum. Låt oss ta ett par kartor, (U, x) och (V, y) . Betrakta snittet av deras definitionsmängder. Där kommer vi kunna göra ett kartbyte $x \rightarrow y$ genom funktionen $y \circ x^{-1}$ [†], och motsvarande åt andra hållet. Om vi kan göra detta överallt kanske vi ändå kan avgöra om funktioner på mångfalden har vissa egenskaper genom att betrakta dessa kartbytesfunktioner.

Definition 6 (Atlas)

En samling kartor, (U_α, x_α) , till en mångfald, M , sådana att unionen av deras definitionsmängder är mångfalden, $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$, kallas för en **atlas** till M . $\times$

En egenskap vi är intresserade av är en glatt struktur. Om alla kartbytesfunktioner på en mångfald är glatta så kan vi tala om glatta funktioner.

Definition 7 (Diffeomorfi)

En avbildning som är en glatt bijektion med glatt invers kallas för en **diffeomorfi**. $\times$

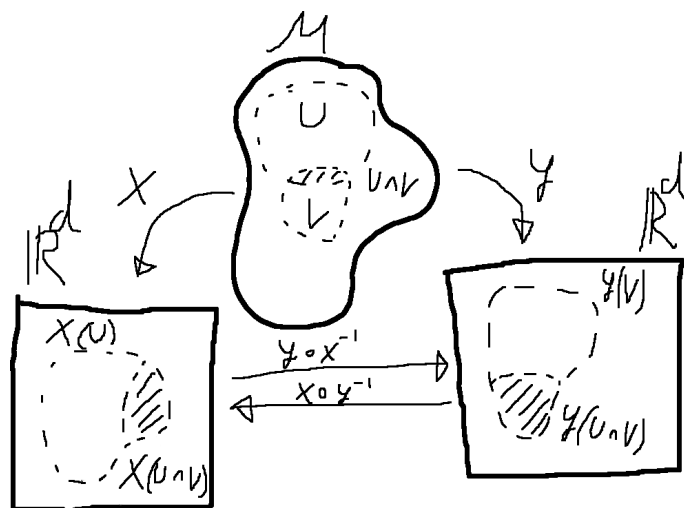
[†] Detta betecknas ibland för två kartor, x_α och x_β som $x_\alpha \circ x_\beta = x_{\alpha\beta}$, men vi kommer inte att använda den notationen.

Definition 8 (Glatt mångfald, glatt atlas)

En mångfald med en atlas, $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A})$, kallas för en **glatt mångfald** om alla kartbytesfunktioner i $\mathcal{A}$ är diffeomorfier. Atlasen kallas då för en **glatt atlas**. ✂

Anmärkelse. Glatta atlaser kan ibland skapas genom att riva ur blad, alltså kasta bort kartor som inte är kompatibla med den glatta strukturen, från en annan atlas.

Anmärkelse. Notera att atlasen behöver såklart täcka hela mångfalden, så att för kartor (U_α, x_α) i atlasen gäller $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$. Vad som är det intressanta med en glatt atlas är områden där de olika kartorna överlappar, $U_\alpha \cap U_\beta$. I varje sådan region måste $x_\alpha \circ x_\beta^{-1}$ vara diffeomorf.

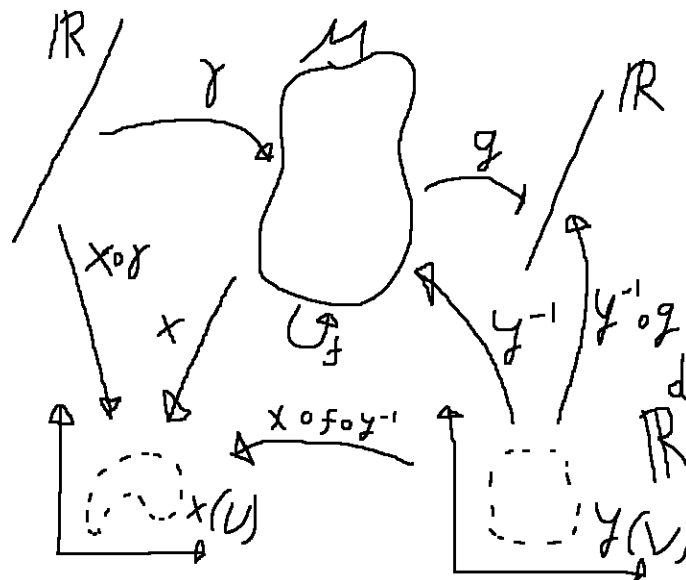


Figur 2: Kartbytesfunktioner för kartor (U, x) och (V, y) , som överlappar i en region, $U \cap V$ (i figuren ritad som snedstreckad, likaså dess avbild med de olika kartorna). Kartbytena, $x \circ y^{-1} : y(U \cap V) \rightarrow x(U \cap V)$ och inversen $y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$ är båda glatta.

Se figur 2 för schematisk bild av kartbyten.

Med våra glatta kartbyten kan vi ta funktioner som har med mångfalden att göra och definiera vad vi menar med att de är glatta eftersom C^k -egenskap bevaras vid sammansättning. Mer konkret, om $f \circ g \circ h$ är C^k så innebär det att alla tre var för sig är det också. Om vi alltså har en okänd funktion, Φ , som vi inte vet hur vi ska derivera (kanske har en delmängd till mångfalden som definitionsområde eller värdemängd) så kan vi analysera den i våra kartor, x och y^{-1} . Så länge vi kan skapa en sammansättning som har både definitionsområdet och värdemängden i ett euklidiskt rum så kan vi avgöra om den sammansättningen är C^k . Om den är det så måste alla ingående funktioner, inklusive Φ vara C^k . Om den inte är det måste minst en bryta mot egenskapen, men eftersom vi vet att våra kartor är diffeomorfier så ligger felet aldrig hos dem och vi kan då avgöra att Φ inte är C^k .

Låt oss illustrera det i några exemplares, se figur 3 för skiss över exempelsituationerna.



Figur 3: Funktionerna f , g och γ har alla mångfalden M som definitionsområde eller värdområde. Det möjliggör matematisk analys. Genom att studera dem i termer av kartor kan vi använda våra kunskaper om euklidiska rum. I figuren är sammansatta funktioner utritade mellan euklidiska rum. Genom dessa kan vi analysera de ingående funktionerna. Till hjälp har vi tagit kartor och deras inverser.

Exempel

Tag en funktion $f : M \rightarrow M$. Om $x \circ f \circ y^{-1} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ är glatt (och det vet vi ju vad det betyder eftersom vi redan har en definition av derivata för funktioner i $(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d)$) så är f glatt (och annars inte). $\boxtimes$

Exempel

Tag en funktion $g : M \rightarrow \mathbb{R}$. Om $y^{-1} \circ g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ är glatt (och det vet vi ju vad det betyder eftersom vi redan har en definition av derivata för funktioner i $(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R})$) så är g glatt (och annars inte). $\boxtimes$

Exempel

Tag en funktion $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$. Om $x \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ är glatt (och det vet vi ju vad det betyder eftersom vi redan har en definition av derivata för funktioner i $(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d)$) så är γ glatt (och annars inte). γ skulle exempelvis kunna vara en kurva och det är ett fall som vi strax får bekanta oss med. $\boxtimes$

Nu har vi den struktur, *glatt mångfald*, som vi behöver för att börja tala om kurvor på mångfalder, som blir nästa steg.

1 Lektion: kurvor, hastigheter och tangentrum

Hädanefter antar vi att vi har en glatt mångfald i åtanke, $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A})$.

1.0 Mål

Vi vill nu kunna beskriva förlopp i rumtiden. En fluga (här tänkt som en punktpartikel) har en bana genom rummet och tiden. Detta vill vi beskriva som en *kurva* i rumtiden, alltså en sammanhängande, kontinuerlig, mängd punkter som genomlöps i tur och ordning. Vi kan till en början tänka oss att vi parametriserar banan med tiden. I varje tidsögonblick har flugan en position. Denna modell blir snabbt dålig så vi kommer i stället parametrisera kurvorna på annat vis.

Flugans bana genom rumtiden definierar även en *hastighet*. Denna egenskap rymms inte i vår nuvarande struktur. Vi väljer att beskriva flugans hastighet i varje punkt med en *vektor*.

Denna vektor kommer ur ett vektorrum som består av alla hastigheter som flugan hade kunna ha (om den flugit längs en annan bana som korsar just den punkten i rumtiden) i just den punkten. Detta vektorrum kallar vi för punktens *tangentrum*, och ett sånt finns i varje punkt.

Med dessa strukturer kan vi beskriva kurvor på mångfalden och deras hastigheter längs vägen.

1.1 Kurvor

Vi börjar med att fundera över *kurvor* på M .

Definition 9 (Kurva på mångfald)

En kontinuerlig funktion, $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ kallas för en **kurva** på M .



Anmärkelse. En kurva är inte en mängd punkter på M . En kurva är det och sin parametrisering. En omparametrisering av kurvan ger en annan kurva, även om mängden av punkter på M som den avbildar på är desamma.

Se figur 4 för en skiss över hur kurvor avbildas på mångfalden och i en karta.

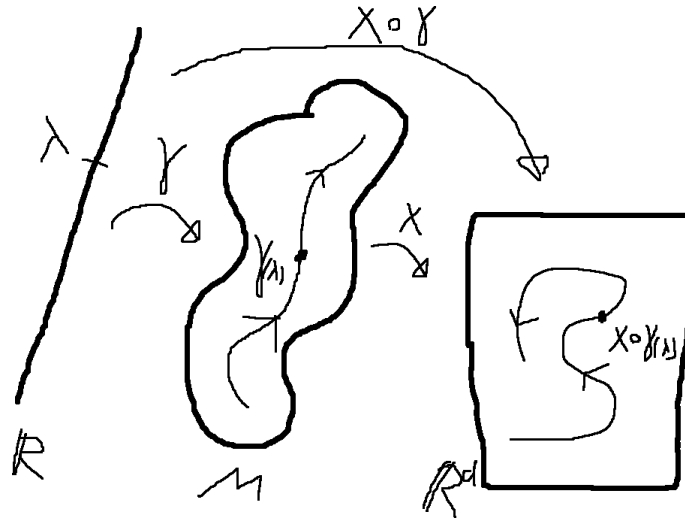
1.2 Hastighet

En kurva binder samman ett gäng punkter längs mångfalden. Vi kanske här kan utvidga vår uppfattning om relationen mellan intill-liggande punkter genom att betrakta kurvans *hastighet*.

Definition 10 (Hastighet av kurva)

En glatt[†] kurva, γ , som genomlöper $p \in M$, har **hastigheten** $v_{\gamma,p}$ vid punkten

[†]Åtminstone C^1 egentligen men vi är intresserade av glatta kurvor.



Figur 4: En kurva på en mångfald och avbildad med en karta. Varje värde, $\lambda \in \mathbb{R}$, av kurvparametern avbildas på en punkt, $\gamma(\lambda) \in M$, på mångfalden och med kartan (U, x) på ett element, $x \circ \gamma(\lambda) \in x(U) \subseteq \mathbb{R}^d$.

$p = \gamma(\lambda_0)$. Detta är en linjär avbildning från glatta skalärvärda funktioner till $\mathbb{R}$,

$$v_{\gamma, p} : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

som definieras av sin verkarn på glatta funktioner, $C^\infty(M)$, på så sätt att

$$f \mapsto v_{\gamma, p}(f) = (f \circ \gamma)'(\lambda_0)$$

Ekvivalent, med tomt-agrument-notation,

$$v_{\gamma, p} = (\cdot \circ \gamma)'(\lambda_0)$$

✂

Detta kan tyckas vara en märklig definition. En hastighet bestäms av hur den verkar på skalärvärda funktioner? Ja det kan man fundera på ganska länge tills det känns bra.

Ett sätt vi kan tänka på det är att vi aldrig är intresserade av en skalärvärd funktion i sig utan alltid på dess värde längs en kurva. Att då verka på funktionen med kurvans hastighet ger den relevanta derivatan av funktionen. Den förändringshastighet som en observatör längs kurvan skulle uppleva med avseende på kurvparametern.

1.3 Tangentrum

Vi noterar att vi kan parametrisera om och rotera kurvor och på så sätt bilda linjärkombinationer av hastigheter i $T_p M$. Detta kommer alltså att bilda ett linjärt rum, som vi kallar för mångfaldens *tangentrum* i punkten p .

Definition 11 (Tangentrum)

Mängden av alla hastigheter för kurvor som korsar $p \in M$ bildar ett vektorrum som vi kallar för **tangentrum** till punkten p och betecknar enligt $T_p M$.

Additionen fås punktvis enligt (notera addition i högerledet på $\mathbb{R}$)

$$+ : T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$$

$$(v_{\gamma,p} + v_{\delta,p})(f) = v_{\gamma,p}(f) + v_{\delta,p}(f)$$

S -multiplikationen fås enligt (notera multiplikation i högerledet på $\mathbb{R}$)

$$\cdot : \mathbb{R} \times T_p M \rightarrow T_p M$$

$$(k \cdot v_{\delta,p})(f) = k \cdot v_{\delta,p}(f)$$

✂

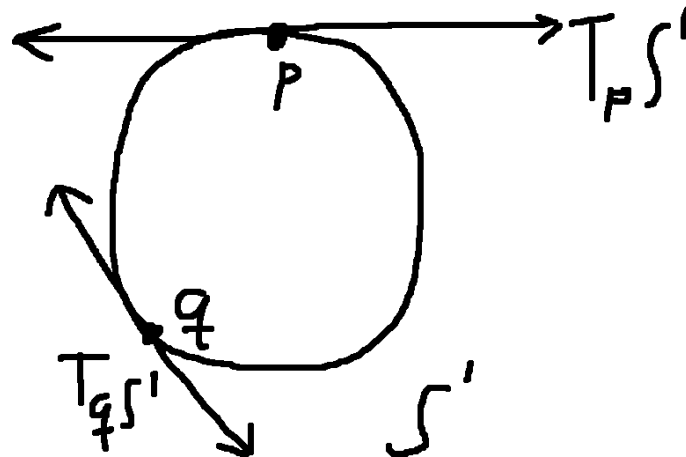
Se figur 5 för en skiss över hur ett par tangentrum kan se ut för en enkel mångfald, S^1 . Se figur 6 för en skiss över hur hastigheter för kurvor som korsar en gemensam punkt bildar vektorerna som utgör tangentrummet i den punkten.

Låt oss nu försöka undersöka dessa hastigheter i en karta, (U, x) .

Betrakta en kurva, γ , som går igenom en punkt, $p = \gamma(0) \in M$. Hur ser dess verkan på en skalärvärd funktion, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ut med avseende på en karta? Vi sätter in $id = x^{-1} \circ x$ i mitten för att testa.

$$\begin{aligned} v_{\gamma,p}(f) &= (f \circ \gamma)'(0) \\ &= ((f \circ x^{-1}) \circ (x \circ \gamma))'(0) \\ (0) \quad &= ((x \circ \gamma)')^\mu(0) \cdot (f \circ x^{-1})'_\mu(x(p)) \\ &= ((x \circ \gamma)')^\mu(0) \cdot (\partial_\mu(f \circ x^{-1}))(x(p)) \end{aligned}$$

Vi tar den första faktorn i sista uttrycket som hastighetens komponenter och det andra som $\frac{\partial f}{\partial x^\mu}$, vilket vi kan dela upp i $\frac{\partial}{\partial x^\mu} f$. Vi tar differentialoperatorn som en bas för hastigheten. Det kallas för *den kartinducerade basen*. Ofta skriver



Figur 5: Mångfalden S^1 (här inbäddad i $\mathbb{R}^2$) har tangentrummen $T_p S^1$ och $T_q S^1$ för de två punkterna $p \in S^1$ respektive $q \in S^1$. De består av alla hastigheter som en kurva längs S^1 kan ha momentant i de respektive punkterna. Vi ser att de liknar $\mathbb{R}$. Vidare noterar vi att tangentrummen har samma dimension som mångfalden själv $\dim(T_p S^1) = \dim(S^1) = \dim(T_q S^1)$, vilket alltid är sant.

vi dem kortfattat som $\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu$ då det inte kan uppstå några tvetydigheter angående vilken karta som inducerat basen.

Basen för tangentrummet är alltså differentialoperatorer, det kan tyckas märkligt till en början men man får vänja sig.

I en kartinducerad bas kan vi alltså skriva hastigheten som

$$(1) \quad v_{\gamma,p} = \dot{\gamma}^\mu(0) \partial_\mu$$

Där vi är noga med att förstå att komponenterna är med avseende på en viss kartinducerad bas och att basen bara är giltig i tangentrummet $T_p M$.

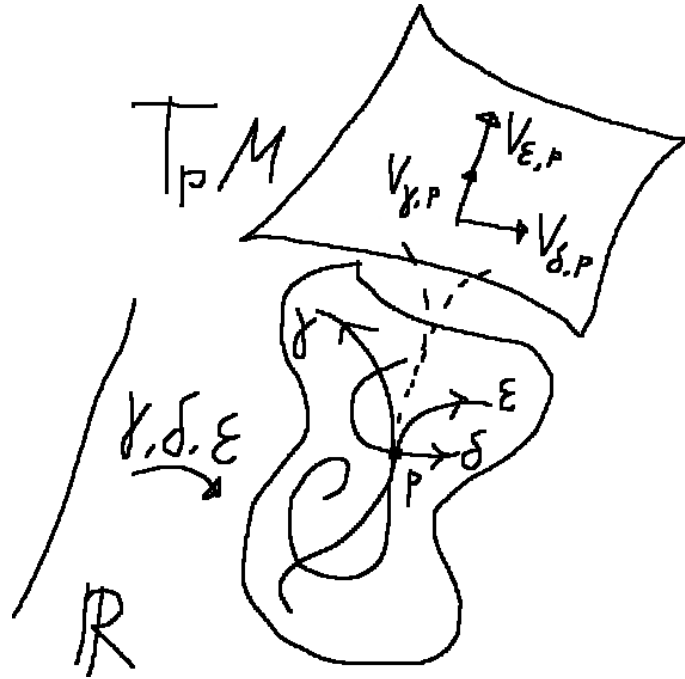
1.4 Duala tangentrummet

Vi passar här på att införa *dualrummet* och *dualbasen*.

Definition 12 (Kotangentrum och kovektorer)

*Dualen till ett vektorrum är vektorrummet som består av mängden av alla funktioner som linjärt avbildar vektorerna på kroppen. Det vektorrum som har det förhållandet till tangentrummet, $T_p M$, kallas för **kotangentrum**, $T_p^* M$ och dess element kallas för **kovektorer**.* ✕

Anmärkelse. Ibland används begreppet *funktionaler* för att referera till linjära funktioner från ett vektorrum, V till kroppen, K , alltså $(V \rightarrow K)$. I vårt fall $(T_p M \rightarrow \mathbb{R})$. Den termen använder vi ej i det här sammanhanget.



Figur 6: Tre kurvor, γ , δ och ε avbildas på M , på ett sådant sätt att alla tre skär punkten $p \in M$. Deras hastigheter i den punkten ligger i punktens tangentrum, $T_p M$. Vi noterar att två av kurvorna, γ och ε , har samma tangenriktning i p . De har emellertid inte samma hastighet, vilket vi kan se genom att betrakta deras respektive vektorer i $T_p M$, här avbildade som pilar. Vi ser att $v_{\gamma,p}$ och $v_{\varepsilon,p}$ är riktade åt samma håll, men har olika storlekar. I det här fallet så löper kurvan ε genom punkten åt samma håll som γ , men med en högre hastighet, här ritat som en längre pil i $T_p M$. Kurvan δ skär punkten i en annan riktning och dess hastighet är därmed linjärt oberoende av de andra två kurvornas hastigheter i den punkten. Tangentrummet, $T_p M$, består i helhet av mängden av hastigheterna som alla möjliga kurvor som korsar p har i den punkten.

Anmärkelse. Dualrummet har såklart samma dimension som vektorrummet och operationerna (addition och S-multiplikation) definieras på samma sätt.

Vi kommer så småningom stöta på en isomorfi mellan dem som kallas för den *musikaliska* avbildningen, så det kan vi se fram emot.

Vi kommer uteslutande använda en bas för $T_p^* M$ som kallas för *dualbasen*.

Definition 13 (Kroneckers δ -symbol)

Symbolen δ_ν^μ (inte en tensor) som är 1 för $\mu = \nu$ och 0 för $\mu \neq \nu$, kallas för **Kroneckers δ -symbol**. $\boxtimes$

Definition 14 (Dualbas)

Givet ett tangentrum, $T_p M$, med bas, ∂_μ , så kan vi alltid bilda en bas på dess dual, $T_p^* M$, dx^ν som uppfyller:

$$dx^\nu \partial_\mu = \delta_\mu^\nu$$

Den basen kallas för *dualbasen* till ∂_μ .



2 Lektion: fält, krökning och förbindelser

Nu har vi ett begrepp om tangentrum på mångfalden där tangentvektorer lever. Vi vill utöka den strukturen till vektorfält, definierade över hela mångfalden.

Ett omedelbart problem vi ser är att detta vektorvärda fält skulle ta värden i olika tangentrum som inte har något med varandra att göra. Det behövs alltså först någon struktur för att samla ihop dem och sedan ytterligare struktur för att binda dem samman.

2.0 Mål

Vi vill kunna beskriva vindens hastighet i varje punkt. För det behöver vi *vektorfält*. Strukturen som vektorfält lever på kallas för *knippen*.

Vi är vana vid att kunna addera och subtrahera vektorer. Det fungerar för element i ett vektorrum, men det fungerar inte nödvändigtvis för vektorer i olika vektorrum, så som våra olika tangentrum. Vi behöver en relation mellan tangentrummen. Det innebär att vi behöver införa en struktur som gör att vi kan jämföra vektorer i ett tangentrum med dem i ett intilliggande. En sådan struktur kallas för en *förbindelse*.

En förbindelse kommer beskriva vad det innebär att en vektor *paralleltransporteras* från ett tangentrum som hör till en punkt på mångfalden till ett annat tangentrum som hör till en intilliggande punkt på mångfalden.

Vad vi som barn tänkt på som *raka kurvor* måste här förkastas. I stället låter vi förbindelsen avgöra om en kurva är rak, alltså om dess hastighet är oförändrad. Vad oförändrad betyder låter vi förbindelsen bestämma.

Eftersom vi nu kan jämföra vektorer i olika tangentrum blir det meningsfullt att införa en derivata med avseende på denna jämförelse. Det blir vad vi kallar för *kovariant derivata*.

2.1 Tvärsnitt på fiberknippen

Definition 15 (Fiberknippe, basrum, totalrum och projektion)

En mångfald, M , en surjektiv avbildning, $\pi : TM \rightarrow M$ och en disjunkt union av alla tangentrum på M , $TM = \sqcup_p T_p M$ kallas tillsammans, (M, π, TM) , för ett **fiberknippe**. M har rollen som kallas för **basrum**, π **projektion** och TM **totalrum**. π definieras av $v \mapsto p$ för $v \in T_p M$. $\boxtimes$

Anmärkning. Vi kommer ofta referera till fiberknippet (M, π, TM) som vi skapar från tangentrummen, $T_p M$, som *tangentknippet*.

Fiberknippet är inte så svårt att förstå. Ett vektorfält ska alltså vara något som avbildar basrummet på totalrummet. Denna struktur kallar vi för tvärsnitt.

Definition 16 (Tvärsnitt)

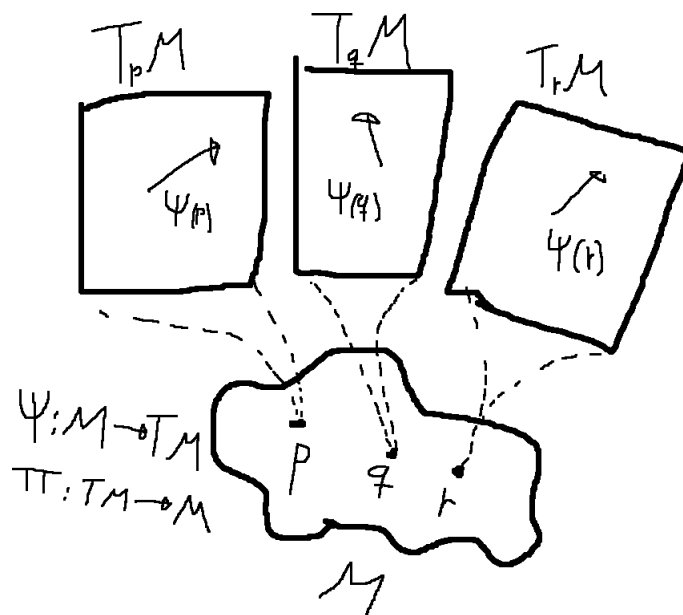
En glatt funktion $\psi : M \rightarrow TM$, på ett fiberknippe, (M, π, TM) , kallas för ett **tvärsnitt** eller ibland helt enkelt **snitt** om den uppfyller

$$\pi \circ \psi = id$$

Mängden av glatta tvärsnitt på knippet betecknas $\Gamma(TM)$



Se figur 7 för en skiss över ett tvärsnitt.



Figur 7: Ett tvärsnitt, ψ , tar punkter på M och avbildar på TM , mer specifikt, för en punkt, $p \in M$, på ett element i $T_pM \subseteq TM$. Projektionen π avbildar element ur TM på M , mer specifikt så avbildar den ett element, $v \in T_pM$ på $p \in M$, exempelvis $\pi \circ \psi(q) = q$. Elementen i tangentrummen har här ritats som pilar, men det är inte av stor betydelse utan är mest till för att tydliggöra att tangentrummen är vektorrum snarare än mångfalder. Till tre punkter på mångfalden har ritats deras respektive tangentrum som ett slags uppblåsning av punkterna själva, så att det blir tydligt att hela tangentrummet är förknippat med punkten på M .

Men vad trevligt, då har vi kommit ganska långt. Vi har fortfarande egentligen inget begrepp om hur vi skulle kunna derivera dessa vektorfält längs mångfalden (trots att vi redan börjat tala om glatta vektorfält) eftersom de tar värden i olika tangentrum för olika punkter på mångfalden. Innan vi börjar fundera över det så noterar vi en vektorrumliknande struktur hos dem.

Vektorfälten, som betecknas $\Gamma(TM)$, bildar en modul på ringen $C^\infty(M)$. Vi noterar att $C^\infty(M)$ inte är en kropp (med punktvis addition och multiplika-

tion) eftersom nollskilda funktioner som vid någon punkt tar värdet 0 saknar multiplikativ invers.

$\Gamma(TM)$ bildar en modul med följande operationer för $\psi, \phi \in \Gamma(TM)$ och $f, g \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned} &+ : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM) \\ &(\psi + \phi)(f) = \psi(f) + \phi(f) \\ (2) \quad &\cdot : C^\infty(M) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM) \\ &(g \cdot \phi)(f) = g \cdot \psi(f) \end{aligned}$$

Där vi noterar att addition och multiplikation i högerledet sker på ringen $C^\infty(M)$. Den matematiska läsaren noterar även att eftersom modulen inte är över en divisionsring så kan vi inte utnyttja Zorns lemma (ekvivalent med urvalsantagandet) för att alltid ha en bas.

2.2 Kotangentknippe

På exakt samma sätt som vi definierade fiberknippet för tangentrummen kan vi definiera knippets dual, alltså *kotangentknippet*, T^*M , med sina glatta snitt $\Gamma(T^*M)$. Dessa verkar alltså på de glatta snitten och avbildar dem på glatta skalärvärda funktioner, $\Gamma(T^*M) = (\Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M))$.

Mer än så behöver inte sägas. Operationerna ärvs på samma punktvisa sätt som för tangentknippet.

2.3 Förbindelser

Nu till frågan angående derivator av vektorfält. Vi kommer att anfälla det här problemet från två håll. Ett mer algebraiskt och ett geometriskt. Vi kommer landa i att båda vägarna kräver samma extra struktur för att kunna derivera vektorfält.

Vad vi vill är att kunna formulera riktningsderivator. Tangentknippet består ju just av riktningar, så en rimlig utgångspunkt är att derivera vektorfält med avseende på vektorfält.

Vi tänker oss att ett skalärvärd fält deriveras på oförändrat sätt, alltså derivatan av skalärfältet f med avseende på vektorfältet X är $X(f)$. För vektorfält är det inte lika enkelt.

Så småningom vill vi ha en Leibniz produktregel för tensorprodukten, men vi väntar med den tills vi definierat tensorprodukt.

2.3.0 Algebraisk väg till förbindelsen

En väg för att konstruera förbindelsen är att utgå från en önskelista, en desiderata. Utöver ovanstående fall, alltså att skalärfält skall reduceras till vanlig

derivata, vill vi ha en form av Leibniz produktregel. Denna formuleras typiskt enligt, för någon deriveringsoperator, D .

$$(3) \quad D(f \cdot g) = D(f) \cdot g + f \cdot D(g)$$

Utöver detta vill vi att den ska vara $C^\infty(M)$ -linjär i argumentet vi deriverar med avseende på och $\mathbb{R}$ -linjär i argumentet vi deriverar.

Låt oss helt enkelt låtsas som att vår deriveringsoperator finns och se vart det leder. Låt oss kalla den för en *kovariant derivata* och beteckna den enligt ∇_X , där X är vektorfältet som vi deriverar med avseende på. Vi har alltså, enligt vår önskelista $\nabla_X f = X(f) = x^\mu \partial_\mu f$. Låt oss verka på en vektor, $V = V^\mu \partial_\mu$.

$$(4) \quad \begin{aligned} \nabla_X V &= \nabla_{X^\mu \partial_\mu} (V^\nu \partial_\nu) \\ &= X^\mu [\nabla_{\partial_\mu} (V^\nu \partial_\nu)] \\ &= X^\mu [\nabla_{\partial_\mu} (V^\nu) \partial_\nu + V^\nu \nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu] \\ &= X^\mu [\partial_\mu (V^\nu) \partial_\nu + V^\nu \nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu] \end{aligned}$$

Där vi utnyttjat flera av de önskade egenskaperna. Den sista termen kan vi skriva om som

$$(5) \quad V^\nu \nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu = V^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \partial_\sigma$$

Vi har alltså infört en ny symbol, $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = dx^\alpha(\nabla_{\partial_\gamma} \partial_\beta)$, som vi kallar för förbindelsekoefficienten. Denna kan alltså betraktas som basvektorerna deriverade med avseende på basvektorerna. I praktiken är det en basbytesoperator i varje riktning. Se [A23] för en kort men tydlig beskrivning. I vårt fall är mångfalden fyrdimensionell, så vi har fyra basvektorer i varje tangentrum. Dessa ska uttryckas som en linjärkombination av fyra baser i ett (än så länge topologiskt) intill-liggande tangentrum. Det finns fyra sådana riktningar att gå i. Totalt bestäms vår förbindelse alltså av 64 skalärfunktioner.

Med en sådan kovariant derivata har vi ett sätt att derivera vektorfält med avseende på vektorfält på ett sådant sätt att resultatet är vektorfält. Försöker vi naivt att derivera utan förbindelse så kommer derivatan inte vara basoberoende, och alltså inte vara vektorfält.

2.3.1 Geometrisk väg till förbindelsen

Låt oss nu glömma föregående kapitel.

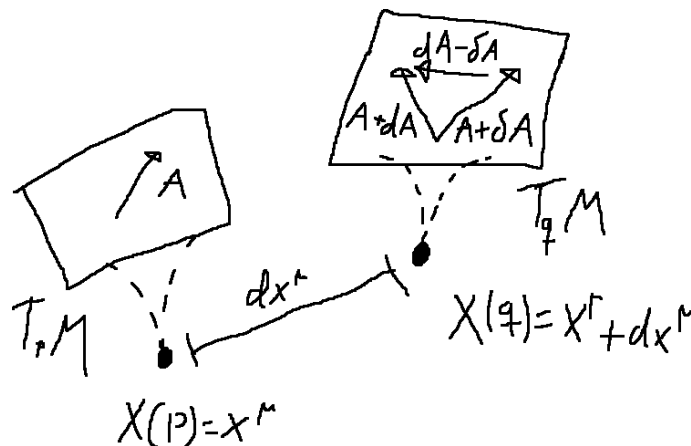
En annan, ekvivalent väg, går genom geometrin[†]. Vi föreställer oss två punkter på mångfalden, p och q , som i en karta, x ligger vid $x(p) = x^\mu$ och $x(q) =$

[†]Egentligen inte eftersom vi inte har någon metrik så det är meningslöst att tala om geometri.

$x^\mu + dx^\mu$ (notera att detta är koordinater i en karta och inte en kovektor). Låt oss säga att vi känner till ett vektorfält, A på M . Man skulle kunna tänka sig att en metod för att räkna ut fältets värde i punkten Q till första ordningen vore att derivata A i riktningen för dx^μ och sen multiplicera med avståndet (på kartan). Låt oss kalla resultatet för $A(p) + dA$. Då får vi

$$(6) \quad A(p) + dA = A(p) + \frac{\partial A}{\partial x^\mu} dx^\mu$$

Ett problem med den här naiva metoden är att vi i uttrycket $\frac{\partial A}{\partial x^\mu}$ har tagit differensen mellan en vektor vid q , nämligen $A(p) + dA$ och en vektor vid p , nämligen $A(p)$. Vi har inget begrepp om differenser mellan vektorer i olika tangentrum. Vad som skulle kunna rädda oss är att vi i $\frac{\partial A}{\partial x^\mu}$ i stället tar differensen mellan $A(p) + dA$ och någon annan vektor i $T_q M$, som då får representera den *oförändrade* vektorn efter något slags flytt mellan tangentrum. Låt oss kalla detta för *parallelltransport*, och definiera ett recept för att parallelltransportera vektorer. Dessa blir då per definition oförändrade. Vi säger att vektorn $A(p) + \delta A$ är parallelltransporterade vektorn av A från $T_p M$ till $T_q M$. Se figur 8 för skiss över situationen. Vad händer med $\frac{\partial A}{\partial x^\mu}$ om vi i differenskvoten sätter in $A(p) + \delta A$ i stället för $A(p)$? Vi provar



Figur 8: Element ur $T_p M$ kan inte jämföras med element ur $T_q M$. Genom att definiera hur en vektor, A , parallelltransporteras från p till q och blir $A + \delta A$ så kan vi jämföra en vektor i $T_q M$ med den parallelltransporterade kusinen till en vektor i $T_p M$. Vi tar alltså inte längre skillnaden $A + dA - A = dA$ som är meningslöst utan i stället $A + dA - (A + \delta A) = dA - \delta A \in T_q M$, som är meningsfullt i det fall att vi även tydliggör ett recept för att hitta parallelltransporterade vektorer $A + \delta A$. Ett sådant recept kallas för *förbindelse*.

$$(7) \quad \frac{A + dA - A}{dx^\mu} dx^\mu = \frac{\partial A}{\partial x^\mu} dx^\mu \rightarrow \frac{A + dA - A - \delta A}{dx^\mu} dx^\mu$$

Vi noterar att täljaren efter transformen, $dA - \delta A$, är en vektor eftersom den är differensen mellan två vektorer i $T_q M$.

$$(8) \quad \frac{dA - \delta A}{dx^\mu} dx^\mu$$

Vi känner igen den första delen som den vanliga derivatan. Den andra termen måste bero linjärt av A och dx^μ , och försvinna då någon av dem är 0. Vi definierar den enligt

$$(9) \quad \frac{\delta A^\nu}{dx^\mu} = \Gamma^\nu_{\alpha\mu} A^\alpha$$

Där vi kallar Γ för förbindelsekoefficienterna. Det finns 64 av dem och de är skalärfunktioner.

Totalt har vi nu vår kovarianta derivata, som vi åter betecknar ∇_X (eller i förkortad form $\nabla_\mu = \nabla_{\partial_\mu}$) i form av

$$(10) \quad \begin{aligned} \nabla_{\partial_\mu} A^\nu &= \frac{dA^\nu - \delta A^\nu}{dx^\mu} \\ &= \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\nu_{\alpha\mu} A^\alpha \end{aligned}$$

2.4 Kovariant derivata

Nu har vi två ekvivalenta bilder av hur vi kan göra en kovariant derivata. Den första grundar sig i att vi bestämmer hur baser uttrycks i baser i intilliggande tangentrum. Den andra grundar sig i att vi bestämmer oss för hur vi definierar att en vektor flyttas oförändrat från ett tangentrum till ett annat. En liten stunds funderan gör att man inser att de säger samma sak.

Definition 17 (Förbindelse, förbindelsekoefficient)

*Ett val av relation mellan topologiskt intilliggande tangentrum, som beskriver hur en vektor från det ena skall tolkas i det andra, kallas för en **förbindelse** och betecknas typiskt ∇ . Den bestäms entydigt av de $\dim(M)^3$ skalärfunktionerna $\Gamma^\nu_{\alpha\mu}$, som är basberoende och kallas för **förbindelsekoefficienter**.* $\boxtimes$

Definition 18 (Parallelltransport)

*Att flytta en vektor mellan tangentrum så att den enligt ett val av förbindelse är oförändrad kallas för **parallelltransport** av vektorn med avseende på förbindelsen.* $\boxtimes$

Definition 19 (Kovariant derivata)

*En derivata som tar hänsyn till parallelltransport med avseende på en förbindelse, och alltså låter tensorfält förbli tensorfält, kallas för **kovariant derivata** med avseende på förbindelsen.* $\boxtimes$

Anmärkelse. Vi har redan sett hur kovariant derivata verkar på skalärfält och vektorfält, men tensorfälten som nämndes ovan kommer så småningom.

Anmärkelse. Ett parallelltransporterat vektorfält, Y , längs ett vektorfält, X innebär att vi har $\nabla_X Y = 0$, vilket i den geometriska tolkningen ovan betyder $dA = \delta A$, och i den algebraiska tolkningen att partialderivatan kompenseras helt av basbytesoperatorerna.

Anmärkelse. Den som studerat algebra kan förnimma en viss relation mellan förbindelsekoefficienter och strukturkonstanter. Detta är inget att skämmas för, utan ett friskhetstecken.

Hädanefter antar vi att vår mångfald har en förbindelse som ännu inte är specificerad. Nu har vi alltså strukturen $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A}, \nabla)$, där ∇ helt bestäms av de $\dim(M)^3 = 4^3 = 64$ skalära funktionerna, som, givet en bas, kan uttryckas som $\Gamma^\nu_{\alpha\mu}$. Det är viktigt att förstå att förbindelsekoefficienterna beror av basen och att de inte är en tensor. Om det framgår vilken bas som åsyftas så undertrycks det, annars skrivs $\Gamma^\nu_{\alpha\mu}(x)$ för att tydliggöra att kartan x använts.

2.5 Kovariant derivata av kovektorfält

Innan vi fortsätter kan vi fundera över hur ett kovektorfält deriveras kovariant. Ett enkelt sätt att se det på är att betrakta den inre produkten mellan kovektorfältet och ett vektorfält. Det blir ju ett skalärfält, vars kovarianta derivata bara är den vanliga riktningsderivatan.

Tag ett kovektorfält $\omega \in \Gamma(T^*M)$, och ett vektorfält, $V \in \Gamma(TM)$. Deras inre produkt (egentligen på den här nivån är det bara kovektorns verkan på vektor, men vi kommer snart att definiera det som en inre produkt) är ett skalärfält,

$$\begin{aligned} \omega(V) &= \omega_\mu dx^\mu V^\nu \partial_\nu \\ &= \omega_\mu V^\nu \delta^\mu_\nu \\ &= \omega_\nu V^\nu \end{aligned} \tag{11}$$

Låt oss derivera detta med avseende på ett vektorfält, $X \in \Gamma(TM)$. Resultatet blir

$$\begin{aligned} X(\omega(V)) &= X^\mu \frac{\partial(\omega_\nu V^\nu)}{\partial x^\mu} \\ &= X^\mu [(\partial_\mu \omega_\nu) V^\nu + \omega_\nu (\partial_\mu V^\nu)] \end{aligned} \tag{12}$$

Resultatet ska bli samma som om vi använt den kovarianta derivatan, $\nabla_X = X^\mu \nabla_\mu$, alltså

$$\begin{aligned}
(13) \quad X^\mu \nabla_\mu (\omega_\mu V^\nu) &= X^\mu [(\nabla_\mu V^\nu) \omega_\nu + V^\nu (\nabla_\mu \omega_\nu)] \\
&= X^\mu [(\partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\alpha\mu} V^\alpha) \omega_\nu + V^\nu (\nabla_\mu \omega_\nu)]
\end{aligned}$$

Vi använder denna likhet för att se vad $\nabla_\mu \omega_\nu$ är

$$\begin{aligned}
(14) \quad X^\mu [(\partial_\mu \omega_\nu) V^\nu + \omega_\nu (\partial_\mu V^\nu)] &= X^\mu [(\partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\alpha\mu} V^\alpha) \omega_\nu + V^\nu (\nabla_\mu \omega_\nu)] \iff \\
(\partial_\mu \omega_\nu) V^\nu &= \Gamma^\nu_{\alpha\mu} V^\alpha \omega_\nu + V^\nu (\nabla_\mu \omega_\nu) \iff \\
\partial_\mu \omega_\nu &= \Gamma^\alpha_{\nu\mu} \omega_\alpha + \nabla_\mu \omega_\nu \iff \\
\nabla_\mu \omega_\nu &= \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma^\alpha_{\nu\mu} \omega_\alpha
\end{aligned}$$

där vi ändrat namn på indices som summeras från andra till tredje versen, så att divisionen med V^ν blir tydligare. Detta är ett trick man måste bli bekväm med; indices som summeras över kan man ändra hur man vill.

3 Lektion: geodeter, torsion och mått på krökningen

En inneboende egenskap i den allmänna relativitetsteorin som inte går att komma undan är *krökning*.

3.0 Mål

Vi vill ha ett sätt att hantera krökningen. Inte minst vill vi kunna reda ut vad det betyder att en fluga flyger i en rak bana. Med ett visst val av förbindelse betyder det samma sak som Newtons första lag.

Vi vill ha ett mått på krökningen. Det visar sig att *Riemann-Christoffel-tensorn* är det vi behöver. Den berättar hur mycket en vektor förändras då den parallelltransporteras med förbindelsen från ett tangentrum till ett annat beroende på vilken väg mellan tangentrummens punkter som valdes.

3.1 Riemann-Christoffel-tensorn, ett mått på krökningen

Låt oss föreställa oss en vektor, säg h , vid en punkt, p . Vi tänker oss två olika kurvor på M som går mellan p och en annan punkt, q . Vad händer om vi parallelltransporterar vektorn längs de båda kurvorna och jämför de båda resultaten i $T_q M$? I allmänhet blir de olika. Vi vill gärna veta i vilka fall de inte skiljer sig, en situation som kallas *integrerbar* eftersom vektorer då kan fås av integralen av dess derivata längs vägen. Vi ska nu härleda ett tillräckligt och nödvändigt villkor för detta.

3.1.0 Geometrisk bild

Låt oss anta en krökningsfri mångfald. Då kan vi ta en vektor, h^μ , och smeta ut den till ett vektorfält genom att definiera dess värde i varje punkt som det parallelltransporterade, alltså enligt förbindelsen oförändrade, värdet det antar i punkten. Med vår geometriska bild av förbindelsen är det alltså

$$\begin{aligned} dh &= \delta h \\ (15) \quad &\iff \\ &\frac{\partial h^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu = -\Gamma^\mu_{\alpha\nu} h^\alpha dx^\nu \end{aligned}$$

Detta ska hålla för varje dx^ν så

$$(16) \quad \frac{\partial h^\mu}{\partial x^\nu} = -\Gamma^\mu_{\alpha\nu} h^\alpha$$

Vilket utgör en differentialekvation för h . Vi utnyttjar nu att de blandade andraderivatorna kommuterar

$$\begin{aligned}
(17) \quad 0 &= -\frac{\partial^2 h^\nu}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 h^\nu}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \\
&= -\frac{\partial}{\partial x^\mu} (\Gamma^\nu_{\alpha\lambda} h^\alpha) + \frac{\partial}{\partial x^\lambda} (\Gamma^\nu_{\alpha\mu} h^\alpha) \\
&= \left[-\frac{\partial \Gamma^\nu_{\alpha\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \Gamma^\nu_{\alpha\mu}}{\partial x^\lambda} \right] h^\alpha - \Gamma^\nu_{\alpha\lambda} \frac{\partial h^\alpha}{\partial x^\mu} + \Gamma^\nu_{\alpha\mu} \frac{\partial h^\alpha}{\partial x^\lambda} \\
&= \left[-\frac{\partial \Gamma^\nu_{\alpha\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \Gamma^\nu_{\alpha\mu}}{\partial x^\lambda} - \Gamma^\nu_{\beta\lambda} \Gamma^\beta_{\alpha\mu} + \Gamma^\nu_{\beta\mu} \Gamma^\beta_{\alpha\lambda} \right] h^\alpha \\
&= B^\nu_{\alpha\mu\lambda} h^\alpha
\end{aligned}$$

Där vi har tagit uttrycket inom hakparenteserna och definierar det som B . Detta är den så kallade *Riemann-Christoffel-tensorn*.

Eftersom detta skall gälla oberoende av h^α så tar vi $B = 0$ som ett nödvändigt villkor för att vägen som en vektor parallelltransporteras inte spelar någon roll. Detta är vad som menas med att en mångfald är platt. För att visa att villkoret även är tillräckligt måste vi gå några extra steg och leka med storleksordningarna utan att vara alltför noggranna (för mer grundligt och mindre skiss-artat bevis, se exempelvis [Sch50]).

Med vår ovanstående relation kan vi uttrycka h^α runt en punkt till andra ordningens noggrannhet med avseende på koordinatavståndet till punkten. En integral längs en slinga inom ett sådant område kommer alltså försvinna till andra ordningen så att den bara kan vara tredje ordningen.

Om vi nu föreställer oss två närliggande kurvor, C och C' mellan ett par punkter, p och q , så kan vi bygga upp en följd av punkter längs C genom att ta ett område kring p , välja en närliggande punkt på C inom området och fortsätta så hela vägen till q . Unionen av dessa regioner kommer då, för vissa val av punkter och områden, att innesluta även C' .

Linjeintegralen längs C kommer inte kunna skilja sig från det exakt parallelltransporterade värdet mer än första ordningen. Genom att dela in området mellan kurvorna C och C' i små segment kan vi se att integralen runt varje sådan segmentslinga högst är tredje ordningen. Längs hela C' kan värdet alltså skilja sig från C högst till andra ordningen. På samma sätt kan vi alltså deformera kurvan vidare och högst vara fel till första ordningen. Genom att minska dessa områden anländer vi till att villkoret $B = 0$ är tillräckligt för integrerbarghet, alltså att vägen vi parallelltransporterar längs inte spelar någon roll.

3.1.1 Algebraisk bild

Vi kan på ett ekvivalent sätt fråga oss vad skillnaden är mellan att först derivera i ena riktningen och sen i andra jämfört med omvänd ordning, alltså

$$(18) \quad (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X) Z$$

Detta är formen för Riemann-Christoffel-tensorn om vi har en torsionsfri förbindelse (mer om det senare), men mer allmänt lägger vi till en torsionsberoende term

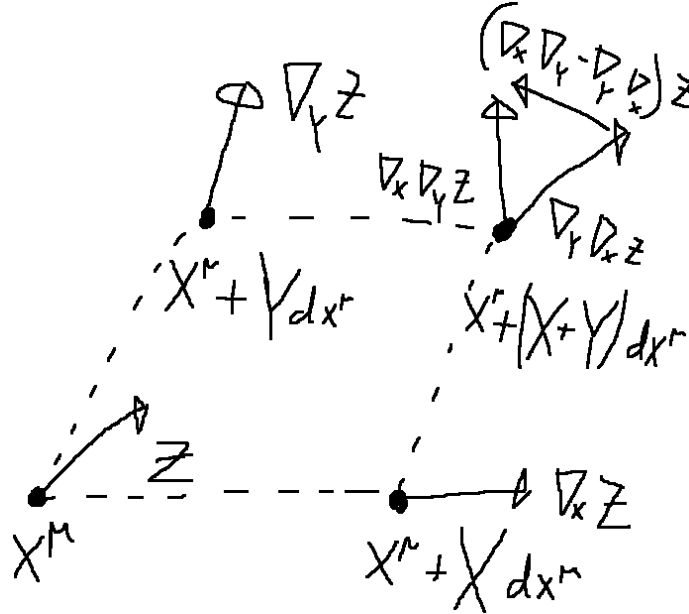
$$(19) \quad \omega \left(\{ \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]} \} Z \right) = B(\omega, Z, X, Y)$$

Där $[X, Y]$ är en Lie-parentes, som definieras av sin verkan på funktioner, $[X, Y](f) = X(Yf) - Y(Xf)$.

Eller i en karta

$$(20) \quad \omega_\alpha X^\beta Y^\gamma Z^\delta \left(\{ \nabla_\beta \nabla_\gamma - \nabla_\gamma \nabla_\beta - \nabla_{[\beta, \gamma]} \} \partial_\delta \right) = B^\alpha_{\beta\gamma\delta} \omega_\alpha X^\beta Y^\gamma Z^\delta$$

Om vi bortser från torsionstermen, som vi snart ändå gör oss av med, så berättar B hur de kovarianta derivatorna misslyckas med att kommutera. Se figur 9 för en skiss över situationen med torsionsfri förbindelse. Det är en bra tolkning så vi passar på att gå in på torsion.



Figur 9: Här behandlar vi en situation med torsionsfri förbindelse. Vi kan betrakta kovarianta derivator längs två vägar som bildar en parallelogram, och där kanterna av parallelogrammen är riktade längs vektorfälten X och Y . Riemann-Christoffel-tensorns verkan beskrivs då av skillnaden mellan derivatorna i slutpunkten, alltså $(\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X)Z$.

3.1.2 Torsion

Torsion är ett mått på hur mycket de kovarianta derivatorna misslyckas med att kommutera jämfört med de vanliga derivatorna. Notera att de vanliga derivatorna alltid kommuterar när de verkar på glatta funktioner.

Definition 20 (Torsion)

En förbindelses, ∇ , torsion är ett $(1,2)$ -tensorfält, T som definieras av

$$T(\omega, X, Y) = \omega(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y])$$

✂

I en karta så kan vi mäta torsionen genom att betrakta hur mycket förbindelsekoefficienterna skiljer sig vid byte av deras lägre indices, $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}$. För en torsionsfri förbindelse är denna skillnad 0.

3.1.3 Symmetrier hos Riemann-Christoffel-tensorn

Nu har vi ett viktigt verktyg för att studera krökning.

Definition 21 (Riemann-Christoffel-tensorn)

Den $(1,3)$ -tensor, B , som i en kartinducerad bas uttrycks som

$$B^\nu_{\alpha\mu\lambda} = -\frac{\partial \Gamma^\nu_{\alpha\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \Gamma^\nu_{\alpha\mu}}{\partial x^\lambda} - \Gamma^\nu_{\beta\lambda} \Gamma^\beta_{\alpha\mu} + \Gamma^\nu_{\beta\mu} \Gamma^\beta_{\alpha\lambda}$$

kallas för **Riemann-Christoffel-tensorn**.[†]

✂

Vi kan från definitionen av B utläsa några symmetriegenskaper. För en d -dimensionell mångfald har B d^4 frihetsgrader. Det kan snabbt bli ganska många. Symmetrierna studeras lättare om vi verkar med metriken först och får $B_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\lambda\alpha} B^\lambda_{\beta\gamma\delta}$. Vi har

$$(21) \quad \begin{aligned} B_{\alpha\beta\gamma\delta} &= -B_{\alpha\beta\delta\gamma} \\ B_{\alpha\beta\gamma\delta} &= -B_{\beta\alpha\gamma\delta} \\ B_{\alpha\beta\gamma\delta} + B_{\alpha\gamma\delta\beta} + B_{\alpha\delta\beta\gamma} &= 0, \quad (\text{Första Bianchi-identiteten}) \\ B_{\alpha\beta\gamma\delta} &= B_{\gamma\delta\alpha\beta} \end{aligned}$$

Dessa symmetrier tar bort en del frihetsgrader. Av de ursprungliga d^4 återstår bara $\frac{d^2(d^2-1)}{12}$. I vårt fall kommer vi ha $\dim(M) = 4$, så vi går från 256 till 20 oberoende komponenter.

[†]Denna definieras ibland med omvänt tecken. Den är uppenbart antisymmetrisk i sina två sista indices så med den alternativa formuleringen hade vi haft $B^\nu_{\alpha\lambda\mu}$.

Ytterligare en egenskap bör nämnas

$$(22) \quad \nabla_\epsilon B_{\alpha\beta\gamma\delta} + \nabla_\gamma B_{\alpha\beta\delta\epsilon} + \nabla_\delta B_{\alpha\beta\epsilon\gamma} = 0$$

Detta kallas ibland för *den andra Bianchi-identiteten*.

3.2 Geodeter - raka kurvor

Nu när vi har ett sätt att derivera vektorfält längs vektorfält och ett mått på krökning, så kan vi fundera över hur ett vektorfält deriverat längs sig själv beter sig. Ett specialfall är ett vektorfält vars derivata längs sig själv är 0. Det är alltså ett vektorfält som parallelltransporteras längs sig själv.

Vi tar en kurva och deriverar dess hastighet längs dess hastighet. Om denna derivata försvinner överallt så transporteras kurvan parallellt.

Definition 22 (Geodet, rak kurva)

En kurva, γ , kallas för en **geodet** eller **rak kurva** (ibland rät) om den uppfyller villkoret

$$\nabla_{v_{\gamma, \gamma(\lambda)}} v_{\gamma, \gamma(\lambda)} = 0$$

✠

Anmärkning. En kurva är inte en mängd punkter på mångfalden utan även en parametrisering. En omparametrisering av en kurva bevarar den geodetiska egenskapen endast om den är affin, $\lambda \rightarrow \alpha\lambda + \tau$. Vi återkommer straxt till detta.

Vi utvecklar detta i en karta och ser vart det leder.

$$(23) \quad \begin{aligned} 0 &= \nabla_{v_{\gamma, \gamma(\lambda)}} v_{\gamma, \gamma(\lambda)} \\ &= (\nabla_{\dot{\gamma}^\mu \partial_\mu} \dot{\gamma}^\nu \partial_\nu) \\ &= \dot{\gamma}^\mu (\nabla_{\partial_\mu} \dot{\gamma}^\nu) \partial_\nu + \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu (\nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu) \\ &= \dot{\gamma}^\mu (\nabla_{\partial_\mu} \dot{\gamma}^\alpha) \partial_\alpha + \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu (\Gamma^\alpha_{\nu\mu} \partial_\alpha) \\ &= (\ddot{\gamma}^\alpha + \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu \Gamma^\alpha_{\nu\mu}) \partial_\alpha \end{aligned}$$

Vilket vi kan skriva om som

$$(24) \quad \Gamma^\alpha_{\nu\mu} = -\frac{\ddot{\gamma}^\alpha}{\dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu}$$

En viktig bit att notera här är att torsionsdelen av förbindelsen inte påverkar geodeter. Symmetrin (med avseende på förbindelsekoefficienternas lägre indices) i uttrycket ovan gör detta uppenbart.

3.3 Omparametrisering av geodeter

Vi måste skilja mellan kurvor där kurvans hastighet, v , uppfyller $\nabla_v v = 0$ och fallet $\nabla_v v = \mu v$, för någon glatt funktion $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. I det senare fallet är kurvan parallell, men inte en geodet. Vi ser att för parallella kurvor måste hastigheten vara proportionell mot hastighetens parallelltransporterade värde. För en geodet, alltså, för en kurva, $\gamma(\lambda)$, som paralleltransporteras mellan två punkter, γ och $\gamma + d\gamma$ måste de vara lika

$$(25) \quad \frac{d\gamma^\kappa}{d\lambda} - \Gamma^\kappa_{\nu\mu} \frac{d\gamma^\nu}{d\lambda} d\gamma^\mu = \mu \left(\frac{\gamma^\kappa}{d\lambda} + \frac{d^2\gamma^\kappa}{d\lambda^2} d\lambda \right)$$

Vi dividerar med $d\lambda$ och sorterar om

$$(26) \quad \mu \frac{d^2\gamma^\kappa}{d\lambda^2} + \Gamma^\kappa_{\nu\mu} \frac{d\gamma^\nu}{d\lambda} \frac{d\gamma^\mu}{d\lambda} = \frac{1 - \mu}{d\lambda} \frac{d\gamma^\kappa}{d\lambda}$$

Om det här skall vara riktigt kan inte μ skilja sig från 1 med mer än ordningen $d\lambda$. Vi kan ersätta μ med 1 i vänsterledet. I högerledet får vi låta μ bero av λ , så vi skriver om enligt

$$(27) \quad 1 - \mu(\lambda) = \Phi(\lambda) d\lambda$$

Då har vi

$$(28) \quad \frac{d^2\gamma^\kappa}{d\lambda^2} + \Gamma^\kappa_{\nu\mu} \frac{d\gamma^\nu}{d\lambda} \frac{d\gamma^\mu}{d\lambda} = \Phi(\lambda) \frac{d\gamma^\kappa}{d\lambda}$$

Låt oss fundera över hur den här ekvationen beror av en omparametrisering, $\lambda \rightarrow s(\lambda)$. Vi får

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{d\lambda} \left[\dot{s} \frac{d\gamma^\kappa}{ds} \right] + \Gamma^\kappa_{\nu\mu} \dot{s} \frac{d\gamma^\nu}{ds} \dot{s} \frac{d\gamma^\mu}{ds} = \Phi(\lambda) \dot{s} \frac{d\gamma^\kappa}{ds} \\
& \iff \\
(29) \quad & \ddot{s} \frac{d\gamma^\kappa}{ds} + \dot{s}^2 \frac{d^2\gamma^\kappa}{ds^2} + \Gamma^\kappa_{\nu\mu} \dot{s} \frac{d\gamma^\nu}{ds} \dot{s} \frac{d\gamma^\mu}{ds} = \Phi(\lambda) \dot{s} \frac{d\gamma^\kappa}{ds} \\
& \iff \\
& \frac{d^2\gamma^\kappa}{ds^2} + \Gamma^\kappa_{\nu\mu} \frac{d\gamma^\nu}{ds} \frac{d\gamma^\mu}{ds} = \frac{\Phi\dot{s} - \ddot{s}}{\dot{s}^2} \frac{d\gamma^\kappa}{ds}
\end{aligned}$$

Om detta skall uppfylla den geodetiska ekvationen så måste

$$(30) \quad \frac{d^2\gamma^\kappa}{ds^2} + \Gamma^\kappa_{\nu\mu} \frac{d\gamma^\nu}{ds} \frac{d\gamma^\mu}{ds} = 0$$

gälla. Villkoret för det är $\Phi\dot{s} - \ddot{s} = 0$. Detta har den allmänna lösningen

$$(31) \quad s = \int^\lambda e^{\int^\lambda du \Phi(u)} d\lambda$$

Med andra ord är det bara affina transformeringar, alltså dem av typen $s \rightarrow as + b$, som bevarar den geodetiska egenskapen.

3.4 Metrik längs geodeter

En liten sista grej vi kan notera innan vi går vidare är att geodeterna inducerar en metrik längs sig. Det är alltså meningsfullt att, med noga hänsyn till parametrisering, mäta kurvsegments längd längs geodeter. Det är alltså meningslöst att jämföra kurvsegment för olika geodeter, även om de tangerar varandra.

Vi ser att $\frac{d\gamma^\kappa}{ds}$ parallelltransporteras för en geodet, γ . Låt oss betrakta detta vid två punkter, $\left(\frac{d\gamma^\kappa}{ds}\right)_p$ och $\left(\frac{d\gamma^\kappa}{ds}\right)_q$, om ds ges samma värde vid båda punkterna så gäller detsamma för $(dx^\kappa)_p$ och $(dx^\kappa)_q$. Då har vi att ds mäter längden mellan två intilliggande punkter på geodeten.

Vi tar integralen av kurvparametern längs en kurva som måttet.

Definition 23 (Förbindelseinducerad metrik)

En förbindelse, ∇ , inducerar en metrik längs geodeterna. För två punkter, p och q , längs en geodet, γ definieras metriken så som

$$d(p, q) = \int d\lambda$$

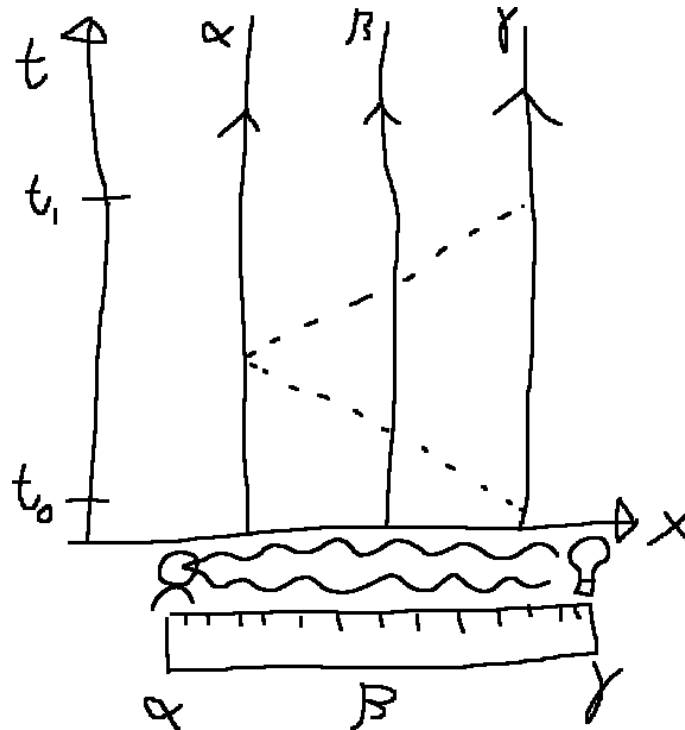
eller mer konkret för $p = \gamma(\lambda_p)$ och $q = \gamma(\lambda_q)$ får vi

$$d(p, q) = \left| \int_{\lambda_p}^{\lambda_q} d\lambda \right|$$

✚

4 Lektion: tensorer, metrik och stationära kurvor

Vi är inte nöjda med att bara ha en metrik längs geodeter. Vi kan ju i verkligheten mäta avstånd mellan saker, så det är väl klart att rumtiden ska ha en vettig metrik? Det är inte så enkelt. Om vi betraktar rumtiden som en mångfald inser vi snart att samtidighet inte är väldefinierat. Mätningar är alltså inte så enkla. Tar vi en linjal och mäter avståndet mellan två punkter så är det omöjligt att få båda punkterna att leka snällt. Se figur 10 för en skiss över situationen. Vad vi kan göra är att börja i en ände, åka kortaste vägen med ljusets hastighet mot andra änden, återvända, mäta hur lång tid det tog och sen dividera med dubbla ljusets hastighet. Detta låter helt efterblivet, men försök att komma på något vettigare!



Figur 10: Vi betraktar en linjal och vill mäta dess längd (vem mäter linjalens längd?). Vi fäster en lampa i ena änden, γ , och en spegel i andra änden, α . Experimentet går till så att lampan lyser mot spegeln och tiden mäts från det att det sänts till det att det återvänt. För tydlighets skull har världslinjerna för tre punkter på linjalen, α , β och γ , ritats tillsammans med ljuspulsen. Det är meningslöst att tala om något avstånd mellan linjalens ändar, men det uppmätta tidsintervallet, $t_1 - t_0$ dividerat med ljusets hastighet ger ändå något mått.

En metrik borde alltså vara något som mäter tiden det tar för en kurva mellan två punkter. Det här är alltså en metrik med direkt fysikalisk signifikans (vilket förvånansvärt få saker tidigare här har haft).

4.0 Mål

Vi vill kunna mäta storlek mellan vektorer i ett tangentrum, exempelvis för att mäta en hastighet. Strukturen vi behöver är en *metriktensor*. Detta är en bilinjär avbildning som tar två vektorer ur tangentrummet och avbildar på en skalär.

Tensorer kan vi skapa från vektorer och kovektorer med något som kallas för den *yttre produkten* (förväxla inte med kilprodukten från Grassmann-algebra) eller *tensorprodukten*. Med denna kan vi klistra ihop grundläggande linjära avbildningar till *multilinjära* avbildningar.

När vi har ett sätt att mäta hastigheter så kan vi definiera *längden av en kurva*. Det leder oss till *verkansprincipen* från klassisk mekanik.

Genom att binda samman metriktensorn och förbindelsen kommer vi se att det går att ställa upp en ekvivalens mellan stationära kurvor och raka kurvor. Då kan vi formulera Newtons första lags motsvarighet i den allmänna relativitetsteorin.

4.1 Tensorprodukt

Tensorer är inte främmande. Från linjär algebra (som du förmodligen lärde dig på ett galekt sätt) är vi vana vid

- ★ $(1, 0)$ -tensorer som vi kallar för vektorer (våga inte säga kolonnvektor!)
- ★ $(0, 0)$ -tensorer som vi kallar för skalärer
- ★ $(0, 1)$ -tensorer som vi kallar för kovektorer (våga inte säga radvektor!)
- ★ $(1, 1)$ -tensorer som vi kallar för linjära operatorer, vektorrumsendomorfier (våga inte säga matris!)

Torsionstensorn, T , ovan är en $(1, 2)$ -tensor och Riemann-Christoffel-tensorn, B , är en $(1, 3)$ -tensor. Allmänt definierar vi en tensorer som

Definition 24 (Tensor, tensorfält)

Givet ett vektorrum så är en (a, b) -**tensor**, T , en funktion som multilinjärt avbildar a kovektorer och b vektorer på kroppen.

I en bas skrivs T som

$$T^{\mu\nu\sigma\dots}_{\alpha\beta\gamma\dots}\partial_\mu \otimes \partial_\nu \otimes \partial_\sigma \dots dx^\alpha \otimes dx^\beta \otimes dx^\gamma \otimes \dots$$

med a indices uppe och b indices nedanför.

Ett **tensorfält** är en funktion som i varje punkt tar värdet av en tensor. ✖

Anmärkelse. Multilinjär innebär linjär i varje argument.

Anmärkelse. Varje grad av tensorer lever i sitt eget linjära rum, så additioner mellan (a, b) -tensorer och (x, y) -tensorer är meningslöst för $a \neq x$ eller $b \neq y$. Exempelvis skrivs rummet $(1, 1)$ -tensorer i punkten p lever i som $T_p M \otimes T_p^* M$, där vi alltså använder symbolen $\otimes$ för olika saker. På samma sätt kan vi skriva rummet där $(2, 0)$ -tensorfält lever som $\Gamma(TM) \otimes \Gamma(TM)$.

Detta duger inte. Vi måste även förklara vad $\otimes$ betyder.

Definition 25 (Tensorprodukt)

Givet ett vektorrum så definieras en **tensorprodukt**, $\otimes$, mellan en (a, b) -tensor, $T^{\alpha \dots}_{\beta \dots}$, och en (x, y) -tensor, $S^{\xi \dots}_{\eta \dots}$, som en bilinjär avbildning på en $(a + x, b + y)$ -tensor, $T \otimes S = W$ sådan att dess komponenter blir

$$W^{\alpha \dots \xi \dots}_{\beta \dots \eta \dots} = T^{\alpha \dots}_{\beta \dots} \cdot S^{\xi \dots}_{\eta \dots}$$

där $\cdot$ sker på kroppen.



Vi kan utöka vår definition av kovariant derivata av tensorprodukter med en Leibniz-produktregel-liknande grej. Varje vektor-lik index kommer alltså ge en addition av en förbindelsekoefficient och varje kovektorlik-index kommer ge subtraktion av motsvarande. På så sätt kan vi enkelt teckna den kovarianta derivatan för ett (a, b) -tensorfält. Först vanliga partialderivatan, sen a styc-ken förbindelsekoefficienter, en för varje vektor i tensorprodukten, och sen b subtraktioner av förbindelsekoefficienter, en för varje kovektor i tensorprodukten.

4.2 Utflykt: isärtagbara tensorer

Varje (a, b) -tensor kan skrivas som en summa av tensorprodukter där varje term är en produkt av a vektorer och b kovektorer. Om en tensor kan skrivas med endast en sådan term kallas den för *isärtagbar*, och annars för *sammansatt*.

Det är viktigt att inse att detta inte är en egenskap som beror av bas utan är en egenskap hos tensorn själv.

Inom kvantmekanik låter man ofta tillstånden representeras av tensorer, där isärtagbara tillstånd kallas för *produkttillstånd* och sammansatta tillstånd kallas för *sammanflätade tillstånd*.

Det är enkelt att visa att tidskomplexiteten för att finna inversen till en inverterbar $(1, 1)$ -tensor skalar med dess dimension upphöjt till tre. För isärtagbara fallet kommer man undan med upphöjt till två.

4.3 Metrik

Nu är det dags att införa ett sätt att mäta saker i allmänhet. Tyvärr kan vi inte tala om avstånd mellan punkter i mångfalden utan vi får nöja oss med en kurvbaserad metrik.

Definition 26 (Metrikens tensorfältet, den musikaliska avbildningen)

En **metrik**, g , är ett $(0,2)$ -tensorfält som är symmetrisk, $g(X, Y) = g(Y, X)$ och odegenererad, alltså den **musikaliska avbildningen** (ibland musikaliska isomorfin) ska vara inverterbar. Den definieras enligt

$$\flat : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(T^*M)$$

med

$$\flat(X)(Y) = g(X, Y)$$

eller med tomt-argument-notation,

$$\flat(X) = g(X, \cdot)$$

✂

Den musikaliska avbildningen och dess invers, $\flat^{-1} = \sharp$, används flitigt för att "höja" och "sänka" indices, genom att relatera en vektor till en kovektor eller tvärt om genom isomorfin. Vi kan ju, mer allmänt, om vi funderar över tensorprodukten även använda den musikaliska avbildningen för att bilda en isomorfi mellan (a, b) -tensorer och $(a - 1, b + 1)$ - eller $(a + 1, b - 1)$ -tensorer (givet att inget sänks under 0 såklart).

Notera att då vi refererar till g^{-1} i en bas så används $g^{\mu\nu}$ snarare än $(g^{-1})^{\mu\nu}$. Detta är helt av anledningen att underlätta notationen.

Exempel

Vi har

$$g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}$$

Denna identitet kan vi skriva om som

$$g_{\mu\alpha} = g_{\nu\alpha} \delta_{\mu}^{\nu}$$

där vi verkar på båda leden med inversmetriken. Utveckla detta genom att sätta in första identiteten i gen

$$g_{\mu\alpha} = g_{\nu\alpha} g_{\mu\beta} g^{\beta\nu}$$

Omformningar av det slaget kommer vara vanliga i kommande beräkningar. ✂

Exempel

Låt U_α och $T^{\alpha\beta}$ vara komponenterna för två tensorer, då har vi med vår notation

$$g^{\mu\alpha}U_\alpha = U^\mu$$

Där U^μ är komponenterna till den vektor som motsvarar kovektorn med komponenter U_α enligt den musikaliska isomorfin. Det är alltså komponenterna till en vektor, fast att U började som en kovektor. Man säger att indexet har höjts. Olyckligtvis är det standardnotation att beteckna båda med U , och hålla koll på om man syftar på kovektorn eller vektorn genom att skriva ut indices.

Vi har även att

$$g_{\mu\alpha}T^{\alpha\beta} = T_\mu{}^\beta$$

och

$$g_{\mu\beta}T^{\alpha\beta} = T^\alpha{}_\mu$$

som inte är samma tensorer. Det är därför viktigt att hålla koll på vilket index man höjer eller sänker. I fall av en symmetrisk tensor, S , kan man lätta på det och skriva $S^\mu{}_\nu$. $\otimes$

4.4 Metrisk signatur

En $(1,1)$ -tensor har egenvärden som inte beror av bas. En $(0,2)$ -tensor har inte det. I stället kan vi beräkna signaturen av dess kvadratiske form. Enligt Sylvesters tröghetslag så kommer tecknet inte ändras vid ett basbyte. För en d -dimensionell tensor betyder det d tecken, $+$, $-$ eller 0 . För en odegenererad tensor är inget tecken 0 . Om alla tecken är samma och nollskilda kallas signaturen för *Riemannsk*. Om alla utom ett, som har omvänt tecken, är samma kallas signaturen för en *Lorentz-metrik*.

Rumtidens metrik är en Lorentz-metrik med signaturen $(+, -, -, -)$. Notera att detta innebär att $g(X, Y) \leq 0$ är möjligt. Dock har vi såklart att $g(X, Y) = 0$ för alla X innebär att $Y = 0$ (odegenererad).

Nu kan vi alltså lägga en metrik till vår struktur för rumtiden, $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A}, \nabla, g)$.

4.5 Ljuskoner

Vi använder kurvor för att beskriva rörelser i rumtiden.

Definition 27 (Världslinje)

En kurva genom rumtiden kallas för *världslinje*. $\otimes$

En världslinje är alltid begränsad till att dess kurvsegment har positiv längd, negativ längd eller längd noll.

Definition 28 (Tidslik, ljuslik, rumslik)

En världslinje, γ , kallas för

★ **tidslik** om $g(v_\gamma, v_\gamma) > 0$ längs hela γ

★ **ljuslik** om $g(v_\gamma, v_\gamma) = 0$ längs hela γ

★ **rumslik** om $g(v_\gamma, v_\gamma) < 0$ längs hela γ



Anmärkning. Viss notation undettrycks ovan för läsbarhet, nämligen punkten för hastigheten. Eftersom det ska gälla längs hela kurvan kan det inte missförstås.

Vi kan alltså se att vi i varje punkt kan dela in riktningarna i två områden med en rand mellan.

Definition 29 (Ljuskon)

Mängden av vektorer, v , i $T_p M$ med $g(v, v) > 0$, kallas för **ljuskonens inandöme** i punkten p . Vektorerna med $g(v, v) = 0$ kallas för **ljuskonens rand**. Resten av vektorerna sägs ligga utanför ljuskonen.



Anmärkning. Namnet kommer ifrån speciell relativitetsteori där vi inte har någon krökning så vi kan sätta metriken till $dx^\mu \otimes dx^\nu \delta_\nu^\mu$, så att avståndet mellan två punkter blir $\Delta t^2 - \Delta x^2$. Detta innebär att ljuskonerna bildar geometriska 4-koner. I speciell relativitetsteori kan vi välja koordinater så att konerna ser likadana ut i varje punkt.

Se figur 11 för en skiss av en tidslik kurva i två-dimensionell Minkowski-metrik, $g = dt \otimes dt - dx \otimes dx$.

Nu har vi alltså tre kategorier av kurvor. Vi ser dock, till vår förvåning, att en tidslik kurva är tidslik även om den genomlöps i motsatt riktning. Det känns ju inte så där superbra för tiden verkar ju ha en riktning.

4.6 Tidsriktning

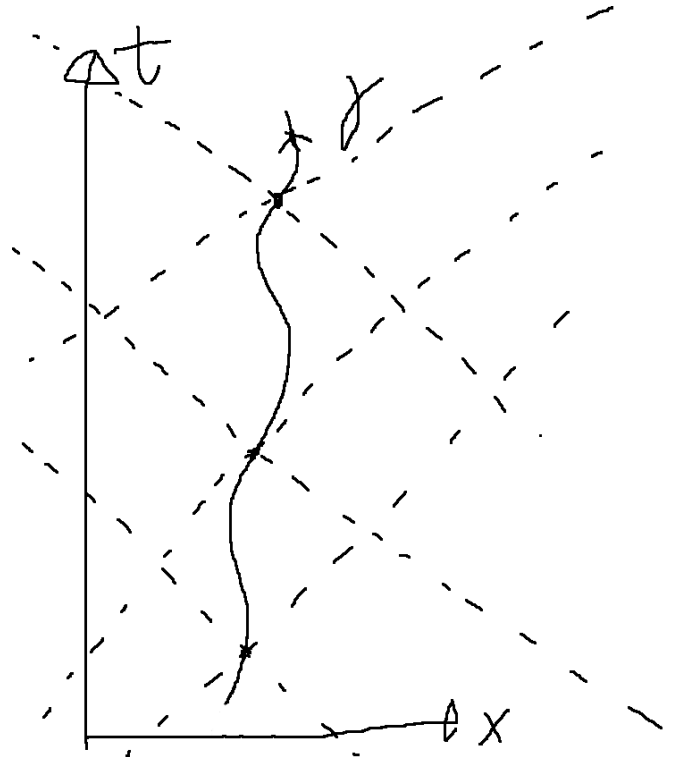
Vi vill definiera en riktning för tiden. Det går tyvärr inte att göra på ett snyggare sätt än att betrakta verkligheten och välja en riktning som passar det vi ser.

Definition 30 (Tidsriktning)

En **tidsriktning**, T , är ett val av glatt vektorfält sådant att det inte försvinner någonstans och $g(T, T) > 0$ överallt.



Anmärkning. Den första egenskapen är bevarad överallt eftersom det är en tensor.



Figur 11: En tidslik kurva i två-dimensionell Minkowski-metrik, $g = dt \otimes dt - dx \otimes dx$. Längs kurvan har tre punkter valts och ljuskoner har ritats från dem. Notera hur hela kurvan alltid ligger innanför ljuskoner som utgår från punkter på kurvan. Ett ekvivalent sätt att uttrycka det på är att kurvans lutning alltid är mindre än 1 och större än -1 . Det är viktigt att poängtera att även om ljuskonerna här är inritade i koordinatsystemet så hör de till tangentrummen i varje punkt.

Anmärkelse. Eftersom vektorfältet är glatt och aldrig 0 så kommer det aldrig kunna byta mantel av ljuskonen utan kommer hålla sig i ena överallt.

Postulat 0

Tiden har en riktning och den kan beskrivas med en tidsriktning.



Hädanefter menar vi med tidslik kurva underförstått en tidslik kurva som går framåt i tiden, alltså $g(v_\gamma, T) > 0$.

Nu är vi nästan klara med strukturen vi behöver till rumtiden. Vi har

$$(32) \quad (M, \mathcal{O}, \mathcal{A}, \nabla, g, T)$$

Vi vill emellertid förena den nya strukturen, g , med vår tidigare, av ∇ inducerade, etablerade metrik längs geodeter.

4.7 Metrisk förbindelse

Vår nya metrik definierar avstånd mellan punkter på kurvor. För en tidslik kurva kan vi tänka oss en klocka som färdas längs den. Hur mycket tid förfluter enligt klockan mellan två punkter på kurvan?

Definition 31 (Tidsintervall)

Ett *tidsintervall*, $\Delta\tau$, mellan två punkter, $\gamma(\lambda_p)$ och $\gamma(\lambda_q)$ på en ljuslik kurva bestäms av

$$\Delta\tau = \int_{\lambda_p}^{\lambda_q} d\lambda \sqrt{g_{\gamma(\lambda)}(v_{\gamma, \gamma(\lambda)}, v_{\gamma, \gamma(\lambda)})}$$

✂

Anmärkning. För tydlighetens skull lade vi till punkten där metriktensorfältet verkar på hastigheterna. Detta var ju egentligen onödigt eftersom hastigheternas punkt angavs och det är bara väldefinierat om de är samma. Allt sker i punkten $\gamma(\lambda)$ för varje värde av λ längs integralen.

Vi vill nu ha en metrik som gör att geodeterna stämmer med metriken. Det kan vi se på två sätt.

4.7.0 Metrisk kompatibilitet genom parallelltransport

För att föra samman de två metrikena inser vi att det krävs ett förhållande mellan metriken komponenter, $g_{\mu\nu}$, och förbindelsekoefficienterna, $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$.

Vi börjar med att ställa upp ett tillräckligt (men för strängt för att vara nödvändigt) villkor, för att sedan lätta på villkoret för att göra det nödvändigt också. Ett tillräckligt villkor är att skalären $g(A, A) = g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu$ bevaras oavsett hur vi parallelltransporterar A .

Låt λ vara en affin parameter för en geodet. Då har vi att skalären $g_{\mu\nu}\dot{\gamma}^\mu(\lambda)\dot{\gamma}^\nu(\lambda)$ bevaras då hastigheten parallelltransporteras längs geodeten. Genom att skala om λ med en affin transform kan vi få längden på varje segment på kurvan att stämma. Detta kan vi göra på varje kurva, så det är ett tillräckligt villkor.

Om vi nu i stället tänker oss att detta skall gälla för invarianten i allmänhet och inte bara längs geodeter så kan vi ställa villkoret på g att den överallt parallelltransporteras till sig själv, alltså att

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_\alpha g_{\mu\nu} \\ (33) \quad &= \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - g_{\beta\nu}\Gamma^\beta_{\mu\alpha} - g_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} \end{aligned}$$

För att göra detta tillräckliga villkor till ett nödvändigt tar vi vad som ser ut som en liten omväg. Först betraktar vi de cykliska permutationerna av

vårt uttryck, sen multiplicerar vi dem med en faktor, som vi skriver intill, och slutligen lägger vi dem samman.

$$(34) \quad \begin{array}{ll} \frac{g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - g_{\beta\nu}\Gamma^\beta_{\mu\alpha} - g_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha}, & -\frac{1}{2} \\ (\mu \rightarrow \nu, \nu \rightarrow \alpha, \alpha \rightarrow \mu), & \frac{1}{2} \\ (\mu \rightarrow \alpha, \nu \rightarrow \mu, \alpha \rightarrow \nu), & \frac{1}{2} \end{array}$$

Då får vi

$$(35) \quad \begin{aligned} 0 = & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) - \\ & - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (\Gamma^\beta_{\nu\mu} + \Gamma^\beta_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} g_{\beta\mu} (\Gamma^\beta_{\nu\alpha} - \Gamma^\beta_{\alpha\nu}) + \frac{1}{2} g_{\beta\nu} (\Gamma^\beta_{\mu\alpha} - \Gamma^\beta_{\alpha\mu}) \end{aligned}$$

Här noterar vi att de två sista termerna är 0 för en torsionsfri förbindelse förty $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}$. Vi inför den inversa metriken, g^{-1} , definierad av att $g^{-1} \circ g = id$, eller i en karta $(g^{-1})^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu$. Då missförstånd ej kan ske skriver vi helt enkelt $(g^{-1})^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$. Då inför vi även för den symmetriska, den antisymmetriska och den första delen av uttrycket ovan

$$(36) \quad \begin{aligned} \overline{\Gamma^\beta_{\nu\alpha}} &= \frac{1}{2} (\Gamma^\beta_{\nu\alpha} + \Gamma^\beta_{\alpha\nu}) \\ \widehat{\Gamma^\beta_{\nu\alpha}} &= \frac{1}{2} (\Gamma^\beta_{\nu\alpha} - \Gamma^\beta_{\alpha\nu}) \\ \Gamma^{\ddot{\alpha}}_{\beta\gamma} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} \left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\sigma\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^\gamma} \right) \end{aligned}$$

Då kan vi slutligen skriva vår sökta förbindelsekoefficient, som är kompatibel med metriken, som

$$(37) \quad \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^{\ddot{\alpha}}_{\beta\gamma} - \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} g_{\beta\rho} \widehat{\Gamma^\rho_{\gamma\sigma}} - \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} g_{\gamma\rho} \widehat{\Gamma^\rho_{\beta\sigma}} + \widehat{\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}}$$

Det här är alltså svaret på frågan vilka förbindelser som parallelltransporterar g till sig själv. Notera att allt efter den första termen är antisymmetriskt, och alltså utgör torsionstermer till förbindelsen. Den enda symmetriska förbindelsen är alltså första termen.

Vad vi kan lära oss av det är att torsionen inte påverkar den metriska kompatibiliteten. Detta kommer återspeglas i vår nästa metod.

För enkelhetens skull väljer vi härnäst torsionsfria förbindelser och tar den symmetriska

$$(38) \quad \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha\cdot\cdot} = \frac{1}{2}g^{\alpha\gamma} \left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\sigma\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^\gamma} \right)$$

som den metrikinducerade förbindelsen.

4.7.1 Metrisk kompatibilitet med stationära kurvor

En kropp förblir i vila, eller i rörelse vid en konstant fart i en rak linje, förutom om det på den verkas med en kraft.

Isaac Newton, översatt från latin

Newton hade rätt i sin formulering men menade fel. Nyckeln ligger i ordet *rak linje*. Vi vet vad det är, Newton visste inte.

Vi ska nu härleda villkoret för en metriskt kompatibel förbindelse på ett annat, ekvivalent, vis, nämligen genom att använda variationsanalys.

Definition 32 (Längd av kurva, stationär kurva)

En kurva, γ , kallas för en **stationär kurva** om variationen, δS , av dess **längd**

$$S = \int_{\lambda_p}^{\lambda_q} d\lambda \sqrt{g_{\gamma(\lambda)}(v_{\gamma, \gamma(\lambda)}, v_{\gamma, \gamma(\lambda)})}$$

är 0.



Anmärkelse. Notera att variationen måste ske på kart-nivå eftersom addition av punkter på mångfalden, och därmed variationer av kurvor är meningslöst. Det går dock att göra koordinatoberoende genom att inte välja specifik karta, utan föra argumentet oberoende av karta.

Med variationsanalysens språkbruk vill vi alltså ställa upp en ekvationer enligt ($\mathcal{L}$ kallas för *lagrangianen* och S kallas för *verkan*)

$$(39) \quad S = \int_a^b d\lambda \mathcal{L}(\lambda)$$

$$\delta S = 0$$

Detta går att göra på det vanliga viset, lägg på en störningskurva som försvinner i ändpunkterna, derivera med avseende på en parameter, släng allt utom linjära

termer, partiell integration, slänga randtermer och så vidare. Vi har redan gjort det förut (särskilt de som sysslat med analytisk mekanik, kvantfältteori eller variationsanalys) och vi vet att resultatet är *Euler-Lagranges* ekvationer (om detta är obekant, se valfri bok om ämnet, exempelvis [Pes95], det är en mycket bra övning att härleda Euler-Lagranges ekvationer). Se extralektionen om matematisk fördjupning, kapitel 15.

Euler-Lagranges ekvationer ger oss villkoret som vi ställer på lagrangianen och de lyder

$$(40) \quad 0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right)$$

Detta ser kanske jobbigt ut för en nybörjare men vi stoppar in vår lagrangian

$$(41) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}(\gamma(\lambda), \dot{\gamma}(\lambda)) &= \sqrt{g_{\gamma(\lambda)}(v_{\gamma, \gamma(\lambda)}, v_{\gamma, \gamma(\lambda)})} \\ &= \sqrt{g_{(\gamma(\lambda))\mu\nu} \dot{\gamma}_{(\gamma(\lambda))}^\mu \dot{\gamma}_{(\gamma(\lambda))}^\nu} \end{aligned}$$

Vi lättar på notationen en smula här för att inte göra det så jobbigt för ögonen. För enkelhetens skull undertrycker vi notationen som visar var fältoperatorerna verkar

$$(42) \quad \begin{aligned} g_{(\gamma(\lambda))\mu\nu} &\rightarrow g_{\mu\nu} \\ \dot{\gamma}_{(\gamma(\lambda))}^\mu &\rightarrow \gamma^\mu \end{aligned}$$

När vi använder vår lagrangian i Euler-Lagranges så kommer vi få många faktorer i derivatorna med rotuttrycket i nämnaren. Vi förkortar det med

$$(43) \quad \frac{1}{\sqrt{\dots}} = \frac{1}{\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu}}$$

Nu är vi redo att stoppa in i Euler-Lagranges och se vad vi får för villkor på vår kurva. Vi börjar med det krångligare uttrycket

$$(44) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}^\mu} &= \frac{1}{\sqrt{\dots}} g_{\mu\nu} \dot{\gamma}^\nu \\ \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}^\mu} \right) &= \partial_\mu \frac{1}{\sqrt{\dots}} g_{\mu\nu} \dot{\gamma}^\nu + \frac{1}{\sqrt{\dots}} (g_{\mu\nu} \ddot{\gamma}^\nu + \dot{\gamma}^\alpha (\partial_\alpha g_{\mu\nu}) \dot{\gamma}^\nu) \end{aligned}$$

Vi kan parametrisera om kurvan så att $g_{\mu\nu}\dot{\gamma}^\mu\dot{\gamma}^\nu = 1$, då försvinner den första termen i högerledet ty det är derivatan av en konstant.

Nu tar vi oss an det lättare uttrycket

$$(45) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma^\mu} = \frac{1}{2\sqrt{\dots}} \partial_\mu g_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^\alpha \dot{\gamma}^\beta$$

Med ovan omparametrisering blir rötterna 1 och derivatan av roten försvinner. Vi får totalt Euler-Lagranges ekvationer enligt:

$$(46) \quad \begin{aligned} 0 &= g_{\mu\nu} \ddot{\gamma}^\nu + \partial_\alpha g_{\mu\beta} \dot{\gamma}^\alpha \dot{\gamma}^\beta - \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^\alpha \dot{\gamma}^\beta \\ &\iff \\ 0 &= \ddot{\gamma}^\lambda + g^{\lambda\mu} \left(\partial_\alpha g_{\mu\beta} - \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\alpha\beta} \right) \dot{\gamma}^\alpha \dot{\gamma}^\beta \end{aligned}$$

Detta är villkoret som utgör en familj av förbindelser som bevarar metriken, alltså som gör att stationära kurvor är raka. Vi väljer en torsionsfri förbindelse, eftersom en sådan inte påverkar geodeterna, och inser att $\partial_\alpha g_{\mu\beta} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\mu\alpha})$. Sätt in det så får vi

$$(47) \quad 0 = \ddot{\gamma}^\lambda + g^{\lambda\mu} \left(\frac{1}{2} \partial_\alpha g_{\mu\beta} + \frac{1}{2} \partial_\beta g_{\mu\alpha} - \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\alpha\beta} \right) \dot{\gamma}^\alpha \dot{\gamma}^\beta$$

Allt väl så långt, men hur, mer praktiskt, låser detta ned förbindelsen till den unika (riemannska geometrins fundamentalsats, se exempelvis [Lee09]) förbindelse som är kompatibel med metriken och torsionsfri? Än så länge har vi bara ett villkor för stationära kurvor, ingenting som relaterar dem till raka kurvor. Vi vill ju att de ska vara samma.

Låt oss gå tillbaka till den geodetiska ekvationen, 23. Den löd

$$(48) \quad \begin{aligned} 0 &= (\ddot{\gamma}^\alpha + \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu \Gamma_{\nu\mu}^\alpha) \partial_\alpha \\ &\iff \\ \Gamma_{\nu\mu}^\alpha &= -\frac{\ddot{\gamma}^\alpha}{\dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu} \end{aligned}$$

Vi ser nu att vi omedelbart att vi har just alla ingredienser för att tillämpa detta villkor på ett stilt sätt. Vi får

$$\begin{aligned}
(49) \quad & -\ddot{\gamma}^\lambda = g^{\lambda\mu} \left(\frac{1}{2} \partial_\alpha g_{\mu\beta} + \frac{1}{2} \partial_\beta g_{\mu\alpha} - \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\alpha\beta} \right) \dot{\gamma}^\alpha \dot{\gamma}^\beta \\
& \iff \\
& -\frac{\ddot{\gamma}^\lambda}{\dot{\gamma}^\alpha \dot{\gamma}^\beta} = g^{\lambda\mu} \left(\frac{1}{2} \partial_\alpha g_{\mu\beta} + \frac{1}{2} \partial_\beta g_{\mu\alpha} - \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\alpha\beta} \right) \\
& \iff \\
& \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = g^{\lambda\alpha} \frac{1}{2} (-\partial_\alpha g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\alpha\mu})
\end{aligned}$$

Vilket är just vad vi fick med den andra metoden med.

4.7.2 Metrisk förbindelse

Vi sammanfattar. Metriken är fysisk, given av GUd. Den *existerar* i någon mening. Förbindelsen är något vi själva inför i syfte att relatera intill-liggande tangentrum, så att vi kan derivera vektorfält och parallelltransportera vektorer.

Vad vi gjort i de föregående kapitlen är att försöka binda samman den fysiska metriken med vår artificeilla förbindelse så att de passar ihop fint. Vi ville att den förbindelseinducerade metriken skall stämma med metriken, eller ekvivalent, att raka kurvor ska vara stationära. Detta villkor kallas för *metrisk kompatibilitet*.

Definition 33 (Metrisk kompatibilitet)

En förbindelse, ∇ , på en metrisk mångfald, $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A}, g)$, kallas för **metrisk kompatibel** om den uppfyller följande tre ekvivalenta villkor

- ★ ∇ parallelltransporterar g .
- ★ Metriken som induceras längs geodeter av ∇ stämmer med g .
- ★ Kurvor som är stationära med avseende på g är geodeter av ∇ .

Förbindelserna som uppfyller dessa villkor utgör en familj av förbindelser som skiljer sig med en antisymmetrisk tensor som kallas torsion. $\boxtimes$

Men vad bra. Om vi nu rycker den förbindelsen som är torsionsfri bland dem så är vi klara. Den har ett speciellt namn.

Definition 34 (Levi-Civita-förbindelsen, Christoffel-symboler av det andra slaget)

En förbindelse, ∇_{LC} , på en metrisk mångfald, $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A}, g)$, kallas för **Levi-Civita-förbindelsen** om den är

- ★ Metriskt kompatibel, $\nabla g = 0$
- ★ Torsionsfri, $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha$

*Levi-Civita-förbindelsens koefficienter, $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, kallas ibland för **Christoffel-symboler av det andra slaget**[†].* ✕

Anmärkelse. Enligt den riemannska geometrins fundamentalsats är denna unik.

Anmärkelse. Av det första slaget är inte så användbart så vi struntar i den definitionen.

Anmärkelse. Vi använder inte ∇_{LC} utan ∇ . Det framgår av sammanhanget vilken förbindelse vi har. Framöver kommer vi inte att vara intresserade av andra förbindelser än Levi-Civita-förbindelsen.

Med detta val av förbindelse är rumtiden smått färdig. Vi har

$$(50) \quad (M, \mathcal{O}, \mathcal{A}, g, \nabla_{LC}, T)$$

[†]Det är inget uttryck som vi använder särskilt ofta. I stället används det mer allmänna förbindelsekoefficient, och läsaren får själv avgöra när det sammanfaller med Christoffel-symbol av andra slaget. Det gör det då förbindelsekoefficienten hör till Levi-Civita-förbindelsen.

5 Lektion: integraler och densiteter

Vad är determinanten av en $(0, 2)$ -tensor?

Anders

Än så länge har vi funderat över kurvor på mångfalden, men ibland vill vi mäta saker som har en utbredning, säg en täthet, över någon region i rumtiden. Låt oss naivt försöka med det. Vi börjar med de vanliga integralerna vi är vana vid.

5.0 Mål

Ibland vill vi studera något över ett område. Det kan vara laddningen i en volym eller flödet ut ur en yta. För att göra det behöver vi *integraler*.

Ingen vet hur man integrerar på en mångfald, så vi försöker skapa ett naturligt sätt utifrån våra kunskaper om hur man integrerar över ett euklidiskt rum med hjälp av vår atlas.

Ett problem vi snabbt stöter på är hur svårt det är att få en *invariant* definition av integraler. Vi behöver i synnerhet någonting som kompenserar för *Jacobi-determinanten*. Det visar sig att det går att få till med transformegenskaperna hos $(0, 2)$ -tensorer.

5.1 Integral av skalära fält

Säg att vi vill integrera $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i regionen (a, b) , då har vi

$$(51) \quad \int_{(a,b)} f = \int_a^b dx f(x)$$

Integralen kan tolkas på lämpligt sätt, typ Riemann-summa, tills vidare. Låt oss utvidga det till ett skalärt fält, $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Då har vi för en lådformig region, $\Omega = \times_{\mu=0}^{d-1} (a_\mu, b_\mu)$

$$(52) \quad \int_{\Omega} \Phi = \int_{a_0}^{b_0} dx_0 \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \dots \int_{a_{d-1}}^{b_{d-1}} dx_{d-1} \Phi(x_0, \dots, x_{d-1})$$

Om vi nu vill ha en region, Ω , som inte är lådformig så utökar vi ovanstående definition till att integrera överallt men multiplicerar samtidigt med en indikatorfunktion, $I_{\Omega} : \mathbb{R}^d \rightarrow \{0, 1\}$, så att $I_{\Omega}(x_0, \dots, x_{d-1}) = 1$ om $(x_0, \dots, x_{d-1}) \in \Omega$ och 0 annars.

$$(53) \quad \int_{\Omega} \Phi = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{d-1} \Phi(x_0, \dots, x_{d-1}) \cdot I_{\Omega}(x_0, \dots, x_{d-1})$$

Det här är ingen stilig definition men den fungerar.

5.2 Byte av variabler under integral

Nu har vi en definition av integraler att luta oss tillbaka på. Är dessa väldefinierade med avseende på variabelbyten? Typiskt nej, inte av sig själva. Vi minns från våra kurser i analys att ett variabelbyte, $\phi = y^{-1} \circ x$, förändrar både integralens region och integranden, men mer därtill, de introducerar en så kallad *Jacobi-determinant*. För en funktion, $F : M \rightarrow \mathbb{R}$, har vi med variabelbytet ϕ

$$(54) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} F(x) &= \int_{\text{preim}_{\phi}(\Omega)} |\det(\partial_{\mu} \phi^{\nu})(y)| \cdot (F \circ \phi)(y) \\ &\neq \int_{\text{preim}_{\phi}(\Omega)} (F \circ \phi)(y) \end{aligned}$$

Notera vår notation, $\det\left(\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\right) = \det(\partial_{\beta}(y \circ x^{-1})^{\alpha})$. För att få en invariant integral behöver vi att integranden motverkar Jacobi-determinanten.

5.3 Volymformer, orientering och densiteter

Ett sätt vi kan kompensera Jacobi-determinanten på är att multiplicera med en faktor som transformerar på motsatt sätt vid ett variabelbyte. Vi kommer inte att härleda en sådan faktor utan i stället ta en och se att den fungerar. Den som är mer intresserad av sådant kan läsa om *volymformer* i exempelvis [Lee09] eller [Hai18]. Med ett val av volymform kan man orientera en mångfald. Om inget val kan göras är det inte en orienterbar mångfald och därmed går det inte att integrera över den.[†]

Låt oss börja med att betrakta hur en $(0, 2)$ -tensor, $\Lambda_{\mu\nu}$ beter sig vid ett basbyte

$$(55) \quad \Lambda_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \Lambda_{\alpha\beta}(y)$$

Kan vi utnyttja detta? Ja kanske, om vi kan ta hyperdeterminanten av det så kanske vi kan få något som kompenserar Jacobi-determinanten. Om hyperdeterminanter inte är bekant så är det inget att skämmas för. Information finns i [Gel94].

[†]Se Möbius-band och Klein-flaskor för exempel på oorienterbara mångfaldar.

Definition 35 (Levi-Civita-symbolen)
Tecknet (pariteten) av en permutation, $\sigma \in S_N^\dagger$,

$$\epsilon^{\sigma(1)\dots\sigma(N)} = \text{sgn}(\sigma)$$

kallas för **Levi-Civita-symbolen**. ✚

Anmärkelse. Vi skriver indices uppe och nere vid ϵ utan att det spelar någon roll. Det enda viktiga är att vi håller koll på ordningen om vi blandar nere och uppe.

Definition 36 (Hyperdeterminant)

Hyperdeterminanten av en multilinjär avbildning, alltså en (r, s) -tensor, T , över ett d -dimensionellt linjärt rum betecknas $\widehat{\det}(T)$ och fås enligt

$$\widehat{\det}(T) = \frac{1}{d!} \epsilon_{a^1(1)\dots a^d(1)} \dots \epsilon_{a^1(s)\dots a^d(s)} \epsilon^{b^1(1)\dots b^d(1)} \dots \epsilon^{b^1(s)\dots b^d(s)} \cdot T^{a^1(1)\dots a^1(s)}_{b^1(1)\dots b^1(r)} \dots T^{a^d(1)\dots a^d(s)}_{b^d(1)\dots b^d(r)}$$

✚

Anmärkelse. Hyperdeterminanten reducerar till den gamla vanliga kända determinanten för fallet $(1, 1)$ -tensorer.

Det där ser inte direkt så där superkul ut. Vi tar ett exempel. Betrakta en 4-dimensionell $(0, 2)$ -tensor, g . Då får vi

$$(56) \quad \widehat{\det}(g) = \frac{1}{4!} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} g_{\rho\gamma} g_{\sigma\delta}$$

Det ser inte så jobbigt ut. Vad vi nu behöver är att veta vad hyperdeterminanten av en sammansättning av tensorer är. Vi är vana, från vanliga determinanter, att

$$(57) \quad \det(A \circ B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Vi har i vårt fall $\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\mu} \Lambda_{\alpha\beta}$ och vill räkna ut determinanten av deras sammansättning. Vi har alltså två $(1, 1)$ -tensorer och en $(0, 2)$ -tensor, alla av dimension d . Låt oss för enkelhetens skull kalla de två första tensorerna för A respektive B . Då har vi att hyperdeterminanternas produkt är

[†] S_N är den ändliga symmetriska gruppen, som innehåller alla $n!$ möjliga permutationer av N objekt.

$$\begin{aligned}
(58) \quad \widehat{\det}(A) \cdot \widehat{\det}(B) \cdot \widehat{\det}(\Lambda) &= \frac{1}{d!} \epsilon_{\alpha^1 \dots \alpha^d} \epsilon^{\mu^1 \dots \mu^d} A^{\alpha^1}_{\mu^1} \dots A^{\alpha^d}_{\mu^d} \cdot \\
&\cdot \frac{1}{d!} \epsilon_{\beta^1 \dots \beta^d} \epsilon^{\nu^1 \dots \nu^d} B^{\beta^1}_{\nu^1} \dots B^{\beta^d}_{\nu^d} \cdot \\
&\cdot \frac{1}{d!} \epsilon^{\beta^1 \dots \beta^d} \epsilon_{\alpha^1 \dots \alpha^d} \Lambda_{\alpha^1 \beta^1} \dots \Lambda_{\alpha^d \beta^d}
\end{aligned}$$

Nu kan vi utnyttja att $\epsilon_{\beta^1 \dots \beta^d} \epsilon^{\beta^1 \dots \beta^d} = d!$, för att kombinera två par av ϵ -faktorer och på så sätt få bort två faktorer $d!$ ur nämnaren. Resultatet blir

$$\begin{aligned}
(59) \quad \widehat{\det}(A) \cdot \widehat{\det}(B) \cdot \widehat{\det}(\Lambda) &= \frac{1}{d!} \epsilon^{\nu^1 \dots \nu^d} \epsilon^{\mu^1 \dots \mu^d} \cdot \\
&\cdot A^{\alpha^1}_{\mu^1} B^{\beta^1}_{\nu^1} \Lambda_{\alpha^1 \beta^1} \dots A^{\alpha^d}_{\mu^d} B^{\beta^d}_{\nu^d} \Lambda_{\alpha^d \beta^d} \\
&= \widehat{\det}(A^\alpha_\mu B^\beta_\nu \Lambda_{\alpha\beta})
\end{aligned}$$

Vi fick alltså precis det vi ville. Hyperdeterminanten av vårt uttryck är alltså

$$\begin{aligned}
(60) \quad \widehat{\det}\left(\left[\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\right]\left(\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu}\right)\Lambda_{\alpha\beta}\right) &= \widehat{\det}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \widehat{\det}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \widehat{\det}(\Lambda) \\
&= \widehat{\det}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \widehat{\det}(\Lambda) \\
&= \det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \widehat{\det}(\Lambda)
\end{aligned}$$

där vi utnyttjat att hyperdeterminanten reducerar till vanlig determinant för $(1,1)$ -tensorer. Så vi har $\widehat{\det}(\Lambda(x)) = \widehat{\det}(\Lambda(y)) \det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$. Det är nästan vad vi ville ha. Vi tar kvadratroten ur uttrycket och får

$$(61) \quad \sqrt{\widehat{\det}(\Lambda(x))} = \left| \det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \right| \widehat{\det}(\Lambda(y))$$

Det är precis vad vi vill ha. Vi sätter in en sån faktor i vår integral (ekvation 54) och får

$$\begin{aligned}
(62) \quad \int_{\Omega} \sqrt{\widehat{\det}(\Lambda(x))} F(x) &= \int_{\text{preim}_\phi(\Omega)} \left| \det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \right| \sqrt{\widehat{\det}(\Lambda(y))} \det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) \cdot (F \circ \phi)(y) \\
&= \int_{\text{preim}_\phi(\Omega)} \text{sgn}\left[\det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\right] \sqrt{\widehat{\det}(\Lambda(y))} (F \circ \phi)(y)
\end{aligned}$$

Det enda som återstår är termen $\text{sgn} \left[\det \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right) \right]$. Den kan vi egentligen inte göra något åt. I stället löser vi det problemet på ett annat sätt.

Ett sätt vi kan lösa det på är genom att begränsa vår atlas så att alla variabelbyten, alltså funktioner på formen $y \circ x^{-1}$, har positiv Jacobi-determinant, $\det \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) > 0$.

Definition 37 (Orienterad atlas)

En *delatlas* (en atlas vars element är i en atlas) $\mathcal{A}^\uparrow \subseteq \mathcal{A}$ kallas för en **orienterad atlas** om varje variabelbytesfunktion, $y \circ x^{-1}$, i den har positiv Jacobi-determinant,

$$\det \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) > 0$$

✂

Anmärkelse. Det finns ingen anledning att anta att en mångfald är orienterbar. Det är en inneboende egenskap. För nyfiken läsare finns gott om exemplares på oorienterbara mångfaldar, typ Möbius-band och liknande, se exempelvis [Lee09].

Med ett sådant objekt kan vi alltså bygga en invariant integral. Detta kan vi göra genom att lägga den som faktor till integranden.

Vi kan välja vilken $(0, 2)$ -tensor som vi vill för att definiera den invarianta integralen. Låt oss göra ett val. Må metriken, g , vara objektet utifrån vilket vi definierar vår invarianta integral.

Definition 38 (Densitet)

En integrand, $\sqrt{\widehat{\det}(g)}F$, som är invariant under variabelbyten,

$$\int_{x(\Omega)} d^d x \sqrt{\widehat{\det}(g(x))} F(x) = \int_{y(\Omega)} d^d y \sqrt{\widehat{\det}(g(y))} F(y)$$

kallas för **densitet**.

✂

Hädanefter begränsar vi vår atlas till en orienterad atlas.

Det här är sista strukturen vi lägger till rumtiden, som nu är

$$(63) \quad (M, \mathcal{O}, \mathcal{A}^\uparrow, \nabla_{LC}, g, T)$$

5.4 Integral över en kartdomän

Låt oss se om våra integraler är väldefinierade. Vi provar helt enkelt ett variabelbyte. Vi börjar med en karta, $(U, y) \in \mathcal{A}^\dagger$, och integrerar en funktion, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ över den. Vi skriver

$$(64) \quad \int_U f = \int_{y(U)} d^d \beta \sqrt{\widehat{\det}(g)} f_{(y)}(\beta)$$

Där vi för tydlighetens skull valt att beteckna kartans koordinater med β även om det vanliga hade varit att använda y . Hur beter den sig under variabelbyte?

$$(65) \quad \begin{aligned} & \int_{y(U)} d^d \beta \sqrt{\widehat{\det}(g(y))} f_{(y)}(\beta) = \\ & = \int_{x(U)} d^d \alpha \left| \det \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \right| f_{(x)}(\alpha) \sqrt{\widehat{\det}(g(x))} \det \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Men vi vet ju, med vår orienterade atlas att beloppstecknen inte spelar någon roll så Jacobi-determinanterna tar ut varandra,

$$(66) \quad \begin{aligned} & \int_{x(U)} d^d \alpha \left| \det \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \right| \sqrt{\widehat{\det}(g(x))} f_{(x)}(\alpha) \det \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right) = \\ & = \int_{x(U)} d^d \alpha \sqrt{\widehat{\det}(g(x))} f_{(x)}(\alpha) \end{aligned}$$

En sådan integral är alltså invariant under variabelbyten.

I fortsättningen definierar vi integraler över en kartregion, Ω , på rumtiden enligt

$$(67) \quad \int_{\Omega} f = \int_{x(\Omega)} d^4 \alpha \sqrt{\widehat{\det}(g_{(x)\mu\nu}(x^{-1}(\alpha)))} f_{(x)}(\alpha)$$

Ofta görs förkortningen $\sqrt{-g} = \sqrt{\widehat{\det}(g)}$. Denna är mycket vanlig i litteraturen men vi kommer inte att använda den.

Där vi gjort det tydligt vilken karta som de olika sakerna är representerade i.

5.5 Integral över hela mångfalden

För att integrera över hela mångfalden använder vi en enhetspartition, vilket mångfalden tillåter om den är (tillräckligt villkor) *parakompakt*, vilket vår struktur är om vi inte väljer någon extremt exotisk topologi. Med en sådan partition viktar vi integranden i kartöverlappsregionerna och integrerar över alla kartregioner.

Vi har nu nått vårt första mål (och kanske även passerat det), vilket var att beskriva kurvor i rumtiden.

Här avslutas första delen av denna kurs, i vilken det nödvändiga matematiska ramverket byggts.

II: Fysik

6 Lektion: materia och rörelsemängd

Här inleds den andra delen av kursen, i vilken den allmänna relativitetsteorin formuleras.

6.0 Mål

Nu när rumtiden är definierad med allt maskineri så vänder vi blicken mot det som fyller den.

Vi vill ha en struktur för att beskriva *materia*, *rörelsemängd* och liknande. Objektet som vi behöver är *SEM-tensorn*, som vi härleder av *symmetri-argument* från *Noethers sats*.

6.1 Återblick över strukturen

Vi har nu en rumtidsstruktur

$$(68) \quad (M, \mathcal{O}, \mathcal{A}^\dagger, \nabla_{LC}, g, T)$$

Låt oss gå igenom varje del innan vi fortsätter.

Vi har alltså en fyrdimensionell mångfald med en orienterad glatt atlas. Det tillåter oss att derivera och integrera över mångfalden.

Vi har en förbindelse som tillåter oss att definiera parallelltransport av vektorer och derivera vektorfält längs vektorfält.

Vi har en metrik med Lorentz-signatur $(+, -, -, -)$.

Metriken som tillåter oss att mäta avstånd inom tangentrummen, vilket vi kan använda för att mäta längd av kurvor.

Vår förbindelse är kompatibel med metriken så att raka kurvor är stationära.

Slutligen har vi valt en tidsriktning, så att vi kan säga om en tidslik kurva är riktad framåt eller bakåt i tiden.

6.2 Energi och rörelsemängd

Energi och rörelsemängd kan bakas ihop till en $(0, 2)$ -tensor som kallas för *SEM-tensorn* (stress – energy – momentum), eller ibland litet slarvigt för *rörelsemängds-tensorn*. Den innehåller information om energitätheten, rörelsemängdstätheten och flödet av rörelsemängd. Vi vill binda samman den med rumtiden på något sätt.

Definition 39 (SEM-tensorn)

Den symmetriska $(0, 2)$ -tensor, $T_{\mu\nu}$, som i varje punkt berättar $(i, j \in \{1, 2, 3\})$

- ★ T_{00} – hur stor energitäthet
- ★ $T_{0j} = T_{j0}$ – hur stor rörelsemängd, alltså energiflöde
- ★ $T_{ij} = T_{ji}, i \neq j$ – hur stort flöde av rörelsemängd
- ★ T_{jj} – hur stort tryck

som finns i den punkten av rumtiden kallas för **SEM-tensorn**. Den definieras formellt för någon materieteori med lagrangian, $\mathcal{L}_m$, av

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m$$

✂

Anmärkelse. Olyckligtvis har vi redan använt T för att definiera tidsriktningen. De är dock två helt skilda storheter. Tidsriktningen är en $(1,0)$ -tensor och SEM-tensorn en $(0,2)$ -tensor, så det ska inte kunna ske några missförstånd.

Anmärkelse. Ofta skrivs energin som $E = T_{00}$, rörelsemängden som $p_j = T_{0j}$ och trycket som $P_j = T_{jj}$. De bildar emellertid en tensor som transformerar som en tensor.

Anmärkelse. Denna definition kan tyckas mycket formell. I praktiken kommer vi oftare ansätta tryck och rörelsemängd. Fördelen med ovan definition är att det går att stoppa in vilken teori som helst.

Exempel

För Klein-Gordon-teori har vi ett skalärt fält, Φ . Då har vi

$$\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2$$

Denna teori beskriver skalära oladdade partiklar. Det är alltså partiklar utan elektrisk laddning eller spinn. ✂

Exempel

För Dirac-teori har vi ett spinor-fält, Ψ . Då har vi

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\Psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi$$

Där $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$, är den flippade adjunkten till Ψ och γ är operatorer som genererar $Cl_{1,3}(\mathbb{R})$.

Denna teori beskriver laddade partiklar med spinn $\frac{1}{2}$. Exempel på sådana partiklar är elektroner. ✂

Vi återkommer straxt till denna tensor. På samma sätt som massa utgör källtermen i Newtons teori, eller strömmen i Maxwells teori, så utgör $T_{\mu\nu}$ källtermen i Einsteins teori.

6.3 Massa

Vid varje tid är nettokraften på en kropp lika med kroppens acceleration multiplicerad med dess massa eller, ekvivalent, förändringshastigheten för dess rörelsemängd.

Isaac Newton, översatt från latin

Newton beskrev massan som ett slags tröghet som gör det svårare, som i att det krävs mer kraft, för att accelerera något som är tungt.

Newtons gravitationsteori satte även massan som källan till gravitationskraften. Detta fungerar väl i vissa sammanhang, men vi måste modifiera det litet så småningom.

Massa är inte så lätt att förstå, men mycket viktigt. Massan är en skalär som vi kan bilda från SEM-tensorn tack vare vår nya metod för integraler.

Definition 40 (Masstäthet, massa)

Den inre produkten av den vektordel av SEM-tensorn som innehåller information om energitäthet och rörelsemängdstäthet, $T_{0\nu}$, med sig själv, bildat av inversmetriken, $g^{\mu\nu}$, alltså

$$g^{\alpha\beta}T_{0\alpha}T_{0\beta}$$

kallas för kvadraten av **masstätheten** och är alltså ett mått på en skalär storhet.

För en partikel, alltså en kropp som existerar i en händelse, är kvadraten av **massan** skalären

$$m^2 = g^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta$$

där p_μ är partikelns rörelsemängd, med den nollte termen dess energi.[†] ✠

Anmärkelse. Varning, det är lätt att missta energitätheten för masstätheten.

Anmärkelse. En uppmärksam läsare kan se att rörelsemängden bildar enmantlade hyperboloider (givet antagandet att massan är positiv). Dessa spelar mycket stor roll i kvantfältteorier, se exempelvis Källén-Lehmans spektralrepresentation.

Nu kommer vi till två viktiga postulat.

[†]Vi ser att om partikeln är i vila, så försvinner rörelsemängdens rumsliga termer. Situationen reducerar då ned till $(p^0)^2 = m^2$, och vi minns att nollte termen är energin. Då kan vi skriva om det som $E^2 = m^2$, och med krav på positiv massa, $E = m$. Om vi återinför ljusets hastighet står det $E = mc^2$, vilket är en av Einsteins mest kända ekvationer.

Postulat 1

Massiva partiklar följer tidslika kurvor. Dessa är geodeter om de inte utsätts för andra krafter. ✕

Postulat 2

Masslösa partiklar följer ljuslika geodeter. ✕

Anmärkelse. Partiklar som hade följt rumslika banor kallas för *tachyoner*, men inga sådana har observerats eller är del av någon etablerad modell.

6.4 Verkansprincipen och Noethers sats

Jag ser inte att kandidatens kön är ett argument mot henne... trots allt är vi ett universitet, inte ett badhus.

David Hilbert angående anställandet av Emmy Noether som professor på Universitetet i Göttingen, översatt från tyska

Vi har redan stött på verkansprincipen då vi utredde vad stationära kurvor hade för betydelse och för att binda samman dem med geodeter. Då hade vi en verkan, S , som var integralen över en lagrangian, $\mathcal{L}$. Vår lagrangian i det fallet var $\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{\gamma}^\mu\dot{\gamma}^\nu}$.

Postulat 3 (Verkansprincipen)

En teori med verkan, S , uppfyller

$$\delta S = 0$$

✕

Verkansprincipen är central för alla moderna fysikaliska teorier (allmän relativitet [uppenbarligen], kvantfältteori, sträng-teori, m-teori, supersymmetri &sv.).

En stor fördel med verkansprincipen är att verkan för ett sammansatt system är summan av deras verkan, eventuellt med en tilläggsterm om de interagerar.

Exempel (Kvantelektrodynamik)

I kvantelektrodynamiken har vi en verkan för elektronen, en verkan för det elektromagnetiska fältet (fotonen) och en term för deras växelverkan. $S_{QED} = S_e + S_\gamma + S_{Interaction}$. Vi kan skriva teorins lagrangian som (ordningen av termerna är bevarad)

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - ej^\mu A_\mu$$

Där F är tensorn som beskriver det elektromagnetiska fältet. ψ är en spinor som beskriver elektronen, i är den imaginära enheten, γ^μ , är ett antal linjära operatorer som genererar Clifford-algebran $Cl_{1,3}(\mathbb{R})$, m är elektronens massa (se

ovan för definition av massa av partikel), e är elementarladdningen[†], j^μ är den elektriska strömmen, $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, (nollte komponenten är laddningstätheten) och A_μ är den elektromagnetiska potentialen.

Lagrangianen är uppbyggd av tre termer. Först en som beskriver det elektromagnetiska fältet, sen en som beskriver materiafältet för Dirac-partiklar och till sist en term för interaktion mellan Dirac-partiklar och det elektromagnetiska fältet.

Notera att denna lagrangian ligger till grund för *hela* kvantelektrodynamiken.



En till fördel med verkansprincipen är att symmetrier tydligt framträder. Emmy Noether formulerade en gång en sats som informellt brukar formuleras: ”Till varje kontinuerlig symmetri som genereras av en lokal verkan så finns det en bevarad ström och vice versa.”

Definition 41 (Bevarad ström)

*Ett vektorfält, $j^\mu\partial_\mu$, är **bevarat** om det är divergensfritt, alltså i en karta skall komponenterna uppfylla*

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

Den kovarianta varianten byter partialderivatan mot kovariant derivata, $\nabla_\mu j^\mu = 0$.



Det visar sig att SEM-tensorn är en sådan bevarad ström. Men till vilken symmetri?

6.5 Härledning av SEM-tensorn givet en teoris symmetri

Låt oss nu härleda SEM-tensorn ur symmetrier till en teori utan krökning (med blir för krångligt just nu). Låt oss alltså låtsas att vi har en lagrangian, $\mathcal{L}(\Phi_a, \partial_\mu \Phi_a, x^\mu)$, som alltså beror av ett gäng skalärfält, Φ_a , deras derivator och koordinaterna (det här är en typisk situation och möjligtvis den enda som uppkommer i naturen). Vi undersöker vad som händer om vi varierar positionen litet (bara första ordningen behöver tas hänsyn till).

$$(69) \quad x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu - \varepsilon^\mu$$

Fältet kommer då variera enligt

[†]En elektrons laddning, förväxla ej med Eulers tal, $e = \exp(1)$.

$$\begin{aligned}
(70) \quad \Phi'_a(x^\mu) &= \Phi_a(x^\mu + \varepsilon^\mu) \\
&= \Phi_a(x^\mu) + \varepsilon^\nu \partial_\nu \Phi_a(x^\mu)
\end{aligned}$$

Notera fältets transform (vanligt misstag är att sätta $x^\mu - \varepsilon^\mu$ som argument). Lagrangianen transformeras enligt

$$\begin{aligned}
(71) \quad \mathcal{L}(x'^\mu) &= \mathcal{L}(x^\mu + \varepsilon^\mu) \\
&= \mathcal{L}(x^\mu) + \varepsilon^\nu \partial_\nu \mathcal{L}(x^\mu)
\end{aligned}$$

Om teorin ska vara oförändrad, alltså att lagrangianen är translationssymmetrisk, så ska Euler-Lagrange-ekvationerna vara oförändrade. Det ger villkoret att följande ström bevaras,

$$(72) \quad j^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \partial_\nu \Phi_a - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}$$

Vi känner i gen detta som SEM-tensorn för teorin, $T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} j^\alpha_\nu$. SEM-tensorn är alltså en bevarad ström, som kommer av symmetri med avseende på translationer.

Eftersom det är en bevarad ström gäller $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$ och i vår teori kommer den kovarianta versionen gälla, $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$. Notera notationen $\nabla^\mu = \nabla_\alpha g^{\mu\alpha}$.

För en mer grundlig genomgång av Noethers sats, se någon bra bok om klassisk fältteori eller kvantfältteori, exempelvis [Pes95]. Vi går också igenom det mer grundligt i extralektionen om matematisk fördjupning, kapitel 15.

7 Lektion: allmän relativitetsteori

Rumtiden anger för materia hur den skall röra sig; materia anger för rumtiden hur den skall böja sig.

John Wheeler, översatt från engelska

Nu har vi den sista ingrediensen för att formulera Einsteins allmänna relativitetsteori, nämligen källtermen $T_{\mu\nu}$.

Teorin sammanfattas i Einsteins fältekvationer. Det finns flera sätt att härleda dem.

7.0 Mål

Det slutgiltiga målet är nu i sikte. Vi vill ha en ekvation som relaterar rumtidens form med materien i den.

Vi börjar med en felaktig ansats och går sedan på en korrekt ansats. Ekvationerna fås ur variationsprincipen för stationär verkan med ett mått på krökning som lagrangian.

7.1 Första ansats

Teorin skall reduceras till Newtons teori för orelativistiska sammanhang. Så som Newtons teori formulerades av Poisson så är laplacianen av en skalärpotential proportionell mot masstätheten,

$$(73) \quad \Delta\Phi = 4\pi G_N \rho$$

Där Φ är gravitationens skalärpotential, G_N är Newtons gravitationskonstant som relaterar massa till kraft och ρ masstätheten.

Tanken med allmän relativitet är att relatera rumtidens form till fördelningen av energi och rörelsemängd.

Vi har redan ett mått på krökning i Riemann-Christoffel-tensorn B . Den har 4 indices (en $(1,3)$ -tensor) men T har bara två (en $(0,2)$ -tensor). De är alltså tensorfält av olika rang. Kan vi bilda någon $(0,2)$ -tensor av B ? Svaret är lyckligtvis *ja*.

Definition 42 (Ricci-tensorn)

Kontraktionen av Riemann-Christoffel-tensorn B enligt[†]

[†]Denna definieras ibland som $R_{\mu\nu} = B^{\alpha}_{\mu\nu\alpha}$. Eftersom B är antisymmetrisk i sina två sista indices så är det bara teckenskillnad.

$$B^\alpha_{\mu\alpha\nu}$$

är en $(0,2)$ -tensor som kallas för **Ricci-tensorn** och betecknas $R_{\mu\nu}$. $\boxtimes$

Är vi klara då? Kan relationen mellan materia och rumtiden vara så enkel som

$$(74) \quad R_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$$

Svaret är dessvärre *nej*.

Det var faktiskt en sådan relation som Einstein själv ställde upp år 1912 e.Kr.

Ett enkelt sätt att se att detta inte duger är att fundera på om båda leden är bevarade. Vi vet ju redan att högerledet är det, ty den kommer av en symmetri och är således en konserverad ström, $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$. Vänsterledet däremot uppfyller inte det villkoret utan vi har $\nabla^\mu R_{\mu\nu} \neq 0$ i allmänhet.

Denna matetmatiska omöjlighet går inte riktigt att argumentera bort på något sätt.

7.2 Hilberts ansats

Tre år senare kom Einstein på fältekvationernas korrekta form. Hans resonemang är krångliga och kanske kan vi ta dem någon gång.

Straxt före hade han presenterat sina försök på en konferens där David Hilbert närvarade. Det resulterade i en matematisk kapplöpning som Hilbert tyvärr förlorade med några veckor. Anmärkningsvärt var Einsteins och Hilberts metoder helt olika från varandra. Vi ska nu följa Hilberts metod.

Hilbert försökte härleda fältekvationerna från verkansprincipen. Han ansatte den enklaste möjliga verkan han kunde.

Definition 43 (Ricci-skalär)

Den skalära storhet som bildas av kontraktionen av Ricci-tensorn, $R_{\mu\nu}$, enligt

$$R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$$

där $g^{\mu\nu}$ är inversmetriken, kallas för **Ricci-skalären** och betecknas R . $\boxtimes$

Anmärkelse. Olyckligtvis används samma tecken för Ricci-skalären som för Ricci-tensorn. Eftersom den första är en $(0,0)$ -tensor och den andra en $(0,2)$ -tensor så ska emellertid inga missförstånd kunna ske.

Hilberts ansats var helt enkelt

$$(75) \quad S_H[g] = \int_M R$$

Ricci-skalären skall alltså vara stationär med avseende på variation av metriken.

7.3 Variation av Hilberts verkan

Till att börja med skriver vi om det som en densitet och i en bas

$$(76) \quad \begin{aligned} S_H[g] &= \int_M R \\ &= \int_M \sqrt{\widehat{\det}(g)} R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

Vi varierar detta och undersöker villkoret för att verkan skall vara stationär

$$(77) \quad \begin{aligned} 0 &= \delta S_H[g] \\ &= \int_M \left(\delta \sqrt{\widehat{\det}(g)} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{\widehat{\det}(g)} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{\widehat{\det}(g)} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right) \end{aligned}$$

Vi tar det term för term, variationen av determinanten av g , variationen av invers-metriken och variationen av Ricci-tensorn. Vi börjar med variationen av $\sqrt{\widehat{\det}(g)}$. Vi har

$$(78) \quad \begin{aligned} \delta \sqrt{\widehat{\det}(g)} &= \frac{\partial \sqrt{\widehat{\det}(g)}}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{\widehat{\det}(g)}} \frac{\partial \widehat{\det}(g)}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} \end{aligned}$$

Vi har flyttat problemet till den inre derivatan, $\frac{\partial \widehat{\det}(g)}{\partial g_{\mu\nu}}$. Denna är inte helt lätt, så vi går tillbaka till definitionen av $\widehat{\det}(g)$, se definition 36, och förändrar den enligt

$$\begin{aligned}
\widehat{\det}(g) &= \frac{1}{4!} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} g_{\rho\gamma} g_{\sigma\delta} \\
(79) \qquad &= \frac{1}{4!} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} g_{\mu\nu} \delta_{\alpha}^{\nu} g_{\nu\beta} g_{\rho\gamma} g_{\sigma\delta} \\
&= \frac{1}{4!} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} g_{\rho\gamma} g_{\sigma\delta}
\end{aligned}$$

där vi utnyttjat $g_{\mu\alpha} = \delta_{\alpha}^{\nu} g_{\mu\nu}$. Nu kan vi enkelt räkna ut derivatan med avseende på $g_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widehat{\det}(g)}{\partial g_{\mu\nu}} &= \frac{1}{4!} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} g_{\alpha\beta} g_{\rho\gamma} g_{\sigma\delta} \\
(80) \qquad &= \frac{1}{4!} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\mu\nu} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} g_{\rho\gamma} g_{\sigma\delta} \\
&= g^{\mu\nu} \widehat{\det}(g)
\end{aligned}$$

där vi använt $g_{\alpha\beta} = g_{\nu\beta} \delta_{\alpha}^{\nu} = g_{\nu\beta} g^{\mu\nu} g_{\mu\alpha}$. Resultatet liknar det vi är vana vid från en den vanliga definitionen av determinant.

Om vi stoppar in det i vår variation får vi slutligen

$$\begin{aligned}
\delta \sqrt{\widehat{\det}(g)} &= \frac{\partial \sqrt{\widehat{\det}(g)}}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} \\
(81) \qquad &= -\frac{1}{2\sqrt{\widehat{\det}(g)}} \frac{\partial \widehat{\det}(g)}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{\widehat{\det}(g)}} \widehat{\det}(g) g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{2} \sqrt{\widehat{\det}(g)} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

Nästa variation är $\delta g^{\mu\nu}$. För denna utnyttjar vi

$$(82) \qquad g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}$$

Från det kan vi utveckla produkten $\delta \delta_{\nu}^{\mu} = 0$ (ursäkta notationen men det är alltså variationen av Kroeneckers delta som såklart är noll) till

$$(83) \qquad 0 = \delta(g^{\mu\alpha}) g_{\alpha\nu} + g^{\mu\alpha} (\delta g_{\alpha\nu})$$

Från det kan vi verka med inversmetriken och få

$$(84) \quad \delta(g^{\mu\nu}) = -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\delta g_{\alpha\beta}$$

Då har vi bara sista biten kvar, men den är rätt krånglig. Vi kan gå tillbaka till definitionen av B (definition 21) för att härleda den så kallade *Palatini-identiteten*, se kapitel 15 för en härledning. För den som vill göra härledningen själv kan det vara bra att minnas att vi arbetar punktvis och att vi i varje punkt kan introducera koordinater sådana att alla $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = 0$ (såklart aldrig överallt i allmänhet men alltid i en punkt). På så sätt blir kovariant derivata och partialderivata samma sak.

$$(85) \quad \delta R_{\mu\nu} = \nabla_\sigma(\delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu})$$

Här väljer vi att gå tillbaka till hela den termen i ekvation 77

$$(86) \quad \sqrt{\widehat{\det}(g)}g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} = \sqrt{\widehat{\det}(g)}\nabla_\beta(g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\rho_{\alpha\rho}) - \sqrt{\widehat{\det}(g)}\nabla_\rho(g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\rho_{\alpha\beta})$$

Där vi utnyttjat att $\nabla_\alpha g^{\mu\nu} = 0$ ty förbindelsen är metriskt kompatibel.

Här måste vi göra ett något komplicerat argument. Högerledets parenteser är vektorer. Varför? Skillnaden mellan två förbindelsekoefficienter är en tensor (om du inte är säker på det, prova att se hur de transformerar under byte av koordinater, se kapitel 15 för härledning), och vi har kontraktioner inom parenteserna så att bara vektorer återstår. Betrakta hur de beter sig under koordinatbyte $x \rightarrow y$

$$(87) \quad \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x) = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial y^\rho} \Gamma_{\nu\rho}^\mu(y) + \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial y^\beta \partial y^\gamma}$$

Vi ser att den andra termen i högerledet är vad som får dem att inte transformera som tensorer. Den är dock oberoende av vad för förbindelsekoefficient det är, så skillnaden mellan två, Γ och $\widehat{\Gamma}$, kommer transformera som $\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial y^\rho} (\Gamma_{\nu\rho}^\mu - \widehat{\Gamma}_{\nu\rho}^\mu)$.

Vi kan alltså skriva om som

$$(88) \quad \begin{aligned} & \sqrt{\widehat{\det}(g)}\nabla_\beta(g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\rho_{\alpha\rho}) - \sqrt{\widehat{\det}(g)}\nabla_\rho(g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\rho_{\alpha\beta}) \\ &= \sqrt{\widehat{\det}(g)}\nabla_\beta A^\beta - \sqrt{\widehat{\det}(g)}\nabla_\rho B^\rho \\ &= \partial_\beta(\sqrt{\widehat{\det}(g)}A^\beta) - \partial_\rho(\sqrt{\widehat{\det}(g)}B^\rho) \end{aligned}$$

Där vi åter har utnyttjat den metriska kompatibiliteten hos förbindelsen.

Nu sätter vi allt samman i gen

$$(89) \quad \delta S_H = \int_M \frac{1}{2} \sqrt{\widehat{\det}(g)} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - \sqrt{\widehat{\det}(g)} g^{\alpha\sigma} g^{\beta\rho} \delta g_{\rho\sigma} R_{\alpha\beta} + \\ + \partial_\beta (\sqrt{\widehat{\det}(g)} A^\beta) - \partial_\rho (\sqrt{\widehat{\det}(g)} B^\rho)$$

Ja men det var ju inte så vackert. Vi kan snygga till det genom att använda ett uråldrigt trick. De två sista termerna är divergenser, så om vi använder *Stokes sats* för att kasta bort dem som yttermen blir vi av med dem. Det kan vi i alla fall göra om vi har fixa ändpunkter, eller kräver att saker försvinner mot oändligheten. För Euler-Lagrange-ekvationerna kommer de i alla fall inte göra skillnad. Vi kastar undan dem och snyggar till vårt uttryck.

$$(90) \quad \delta S_H = \int_M \sqrt{\widehat{\det}(g)} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - R^{\mu\nu} \right] \delta g_{\mu\nu}$$

Där vi använt definitionen av Ricci-skalären. Detta skall gälla för en godtycklig variation så det som är inom hakparenteserna måste försvinna.

Definition 44 (Einstein-tensor)
(0,2)-tensorn som fås enligt

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

kallas för **Einstein-tensorn** och betecknas $G_{\mu\nu}$.

✂

7.4 Tillägg av materia till Hilberts verkan

Låt oss nu justera verkan genom att använda verkansprincipens stora styrka, additiviteten. Vi lägger helt enkelt till en term till lagrangianen och får verkan

$$(91) \quad S_{H+m} = \int_M \sqrt{\widehat{\det}(g)} \left[\frac{1}{2\kappa} R + \mathcal{L}_m \right]$$

För något (eller några för den delen, det är ju rent additivt) materiefält, $\mathcal{L}_m$. Vi har även skalat om R med faktorn $\kappa = 8\pi G_N$. Vi tar variationen av detta och får

$$(92) \quad \delta S_{H+m} = \int_M \left[\frac{1}{2\kappa} \frac{\partial \left(R \sqrt{\widehat{\det}(g)} \right)}{\partial g_{\mu\nu}} + \frac{\partial \left(\mathcal{L}_m \sqrt{\widehat{\det}(g)} \right)}{\partial g_{\mu\nu}} \right] \delta g_{\mu\nu}$$

Vi får alltså att om det skall försvinna för godtycklig variation (som tillsammans med sin derivata försvinner på randen) har vi villkoret

$$(93) \quad 0 = \frac{1}{\sqrt{\widehat{\det}(g)}} \frac{\partial \left(R \sqrt{\widehat{\det}(g)} \right)}{\partial g_{\mu\nu}} + 2\kappa \frac{1}{\sqrt{\widehat{\det}(g)}} \frac{\partial \left(\mathcal{L}_m \sqrt{\widehat{\det}(g)} \right)}{\partial g_{\mu\nu}}$$

Där vi även har brutit ut en faktor $\sqrt{\widehat{\det}(g)}$ och multiplicerat med 2κ . Den första termen känner vi i gen som $G^{\mu\nu}$. Den andra termen skriver vi om som

$$(94) \quad 2\kappa \frac{1}{\sqrt{\widehat{\det}(g)}} \frac{\partial \left(\mathcal{L}_m \sqrt{\widehat{\det}(g)} \right)}{\partial g_{\mu\nu}} = \kappa \left[2 \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g_{\mu\nu}} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_m \right]$$

Vi känner i gen detta som $-\kappa T^{\mu\nu}$.

För en mer ingående beskrivning av tillägg av materietermer till lagrangianen, se [Dir75] som ger en kompakt men utförlig beskrivning av addition av rörelsemängdsfältet, elektromagnetiska fältet och den elektriska laddningens koppling till det elektromagnetiska fältet. Se även [Wal84] och [Bla24] för mycket utförliga och detaljerade genomgångar av ämnet.

Vi har nu våra villkor.

7.5 Fältekvationerna

Einsteins fältekvationer lyder

$$(95) \quad G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Där c är ljusets hastighet som vi oftast sätter till 1.

För tomrum har vi alltså $T_{\mu\nu} = 0$

$$\begin{aligned}
(96) \quad 0 &= G_{\mu\nu} \\
&= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \\
&\iff \\
R_{\mu\nu} &= 0
\end{aligned}$$

För $T_{\mu\nu} \neq 0$ är ekvationerna mycket svåra att lösa. De är inte linjära, så lösningar kan inte adderas och Fourier-metoder går således inte att använda. De är icke-linjära på grund av att fältet kopplar till sig själv. Gravitationen själv påverkas av gravitation.

Det är 16 ekvationer men eftersom båda sidor är symmetriska tensorer återstår endast 10 oberoende ekvationer.

Med viss symmetri och annat till hjälp går det att finna lösningar för dem.

En vanlig alternativ form är

$$(97) \quad R_{\mu\nu} = 8\pi(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu})$$

där $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = T^\mu_\mu$, alltså spåret.

7.6 Gravitationell konstant

En sista sak att lägga till. Hilberts verkan är oförändrad vid tilläg av en konstant, Λ , på ett ställe.

$$(98) \quad S = \int_M \sqrt{\widehat{\det}(g)}(R - 2\Lambda)$$

Einstein insåg det då han publicerade teorin och hade med den. Han kallade det så småningom för sitt livs största blunder men det visade sig att den kanske skall vara där ändå.

Med den *gravitationella konstanten* eller den *kosmologiska konstanten*, Λ , så lyder fältekvationerna

$$(99) \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4}T_{\mu\nu}$$

För tomrum innebär det

$$(100) \qquad R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$$

Härmed slutar del två av denna kurs. Vi har nått vårt mål i att formulera teorin.

III: Tillämpningar

8 Lektion: newtonska gränsen, rödsifte och tvillingproblemet

Här inleds den tredje delen av kursen. Låt oss nu se vad vår teori har för konsekvenser och om de stämmer överens med vad vi kan mäta.

Till att börja med måste vår teori i den orelativistiska gränsen reduceras till Newtons teori för gravitation. Sedan ska vi fundera kring hur ljusets färg påverkas av metriken tidskomponent. Slutligen tar vi oss an det gamla klassiska tvillingproblemet, som egentligen är ett problem från speciell relativitetsteori eftersom det inte beror av gravitation alls.

8.0 Den Newtonska gränsen

I Newtons teori är gravitationen en acceleration som representeras av ett kovektorfält, g_j , som fås av gradienten av en skalärpotential,

$$\begin{aligned} g_j dx^j &= -d\Phi \\ (101) \qquad &= -\frac{\partial\Phi}{\partial x^j} dx^j \end{aligned}$$

Notera latinska indices $i, j \in \{1, 2, 3\}$, alltså bara de rumsliga riktningarna.

Vi kan formulera teorin med Gauss *divergenssats* som

$$(102) \qquad \Delta\Phi = 4\pi G_N \rho$$

Om vi nu skriver om dessa två i vår tidigare använda notation får vi Poisson-ekvationen enligt

$$(103) \qquad \partial_j \partial^j \Phi = 4\pi G_N \rho$$

och för en partikels acceleration, $\ddot{x} = g$,

$$(104) \qquad \partial_0 \partial^0 x^j = -\partial^j \Phi$$

Nu tar vi motsvarande uttryck i Einsteins formulering. Från fältekvationerna får vi något som motsvarar Poisson-ekvationen ovan i

$$(105) \qquad R_{\mu\nu} = K(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu})$$

Där vi löst ut ricci-tensorn och dragit samman $T_{\mu\alpha}g^{\mu\alpha} = T$.

Från den geodetiska ekvationen får vi något som motsvarar uttrycket för partikelns acceleration

$$(106) \quad \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}$$

I den Newtonska gränsen ska hastigheten vara försumbar jämfört med ljusets hastighet.

$$(107) \quad \frac{dx^\beta}{d\tau} \approx \frac{dx^0}{d\tau}$$

Med den förenklingen blir vår geodetiska ekvation för de rumsliga riktningarna

$$(108) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 x^j}{d\tau^2} &= -\Gamma^j_{00} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} \iff \\ \frac{d^2 x^j}{(dx^0)^2} &= -\Gamma^j_{00} \end{aligned}$$

Vi kan nu jämföra detta med den Newtonska, de är samma om

$$(109) \quad \begin{aligned} \partial^j \Phi &= -\Gamma^j_{00} \\ &= \frac{1}{2} f^{j\alpha} (\partial^0 g_{\alpha 0} + \partial^0 g_{0\alpha} - \partial^\alpha g_{00}) \end{aligned}$$

Endast sista termen i parentesen överlever ty tidsderivatan av metriken måste försvinna i en orelativistisk region. Vi får alltså

$$(110) \quad 2\partial^j \Phi = -\partial^j g_{00}$$

Detta löses av

$$(111) \quad g_{00} = -2\Phi - c^2$$

Vi behöver alltså bara 00-komponenten från Einsteins fältekvationer. Vi tar den

$$(112) \quad R_{00} = K(T_{00} - \frac{1}{2}Tg_{00})$$

Vi vet ju att T_{00} är energitätheten (multiplicerad med ljusets hastighet upphöjt till fyra) och för orelativistiska hastigheter så är det samma som masstätheten, ρ . Den som behöver friska upp minnet, $p^\mu p_\mu = m^2$, eller i platt rumtid, $E^2 - p^2 = m^2$, så om vi kan försumma rumslig rörelsemängd, vilket vi kan för små hastigheter, har vi $E^2 = m^2$. Vi får

$$(113) \quad R_{00} = K\frac{1}{2}\rho c^4$$

Om vi går tillbaka till definitionen av Ricci-tensorn och kastar termer som är andra ordningen i förbindelsekoefficienterna (vilket vi borde kunna för nästan platt rumtid) får vi

$$(114) \quad R_{00} = \partial_\rho \Gamma^\rho_{00} - \partial_0 \Gamma^\rho_{\rho 0}$$

Tidsderivatan försvinner och kvar blir

$$(115) \quad R_{00} = \partial_\rho \Gamma^\rho_{00}$$

Slutligen har vi alltså

$$(116) \quad \begin{aligned} \partial_j \partial^j \Phi &= \partial_\rho \Gamma^\rho_{00} \\ &= R_{00} \\ &= \frac{1}{2}K\rho c^4 \end{aligned}$$

Detta är precis Newtons teori för valet

$$(117) \quad K = \frac{8\pi G_N}{c^4}$$

Vilket är precis vad vi vill ha. Ingen vidare snygg härledning men ändå. Snyggare härledning finns i exempelvis [Dir75].

8.1 Gravitationellt rödskifte

Låt oss nu föreställa oss en atom som skickar ut ljus. Det kan exempelvis vara en ur en stjärna i fjärran.

Vi gör förenklingen att vi väljer ett statiskt koordinatsystem, så att tidsderivatan av metriken försvinner, $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$. Vidare låter vi stjärnan och en observatör vara i vila (annars får vi så kallade *Doppler-effekter* som överskuggar gravitationens skifte). Atomen finner vi vid p och observatören vid q . Vi skalar om enheter så att $g_{00}(q) = 1$ vid observatören och $g_{00}(p) \neq 1$ vid stjärnan.

Vi vill undersöka relationen mellan periodtiden för ljuset som atomen sänder och det som observatören mäter. Vi har redan postulerat att hur mycket en klocka, som har massa och alltså följer en tidslik kurva, gått under ett intervall bestäms av hur lång kurvan den färdats är. Det betyder att vi kan parametrisera sådana kurvor med hur klockan går. Detta kallas ibland för *egen-tid*. Det är viktigt i detta exempel att skilja koordinat-tid från egen-tid.

Periodtiden för atomens ljus måste vara en konstant sträcka, ΔS . Eftersom stjärnan är i vila så kan vi lätt räkna ut sträckan,

$$(118) \quad \Delta S^2 = g_{00} \Delta x^0$$

Vilket vi får från kurvlängden

$$(119) \quad dS = \sqrt{g(v, v)} d\lambda$$

där vi har $v = \frac{\partial x^0}{\partial \lambda}$ ty stjärnan är i vila.

Låt oss säga att en period för stjärnans ljus börjar vid $x^0 = x_0^0$, i vårt koordinatsystem. Den kommer då vara färdig vid

$$(120) \quad x_0^0 + \Delta S = x_0^0 + \Delta x^0 \sqrt{g_{00}(p)}$$

Eftersom metriken är statisk, oförändrad i tid, kommer Δx^0 vara oförändrad då vi låter ljuset åka i väg.

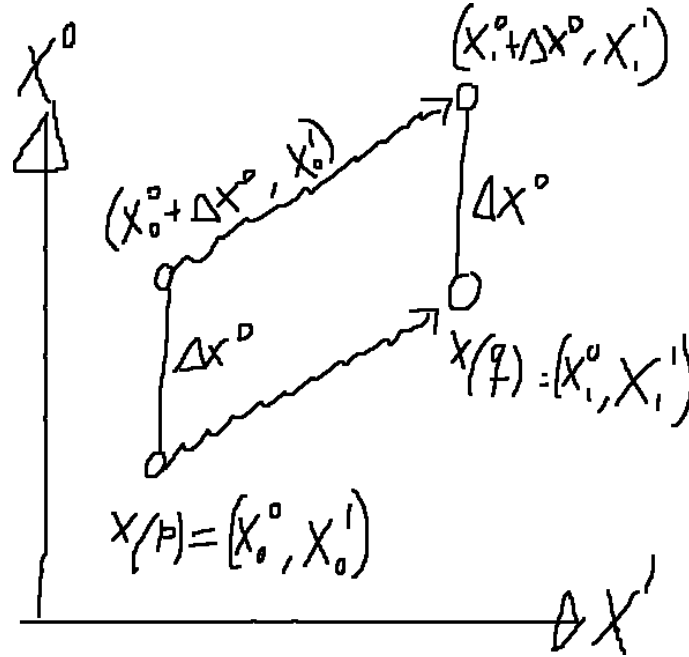
Observatören tar emot ljuset vid $x^0 = x_1^0$. Perioden kommer vara färdig vid

$$(121) \quad x_1^0 + \Delta x^0$$

Problemet är att detta kommer i observatörens egentid ta

$$(122) \quad \begin{aligned} \Delta S' &= \Delta x^0 \sqrt{g_{00}}(q) \\ &= \Delta x^0 \end{aligned}$$

Se figur 12 för en skiss över situationen.



Figur 12: De två observatörerna mäter samma skillnad i koordinattid, Δx^0 , mellan ljusperiodens början och slut. Det som faktiskt gör skillnad däremot är att de mäter olika skillnad i egentid, ΔS . Detta kan fås av att de löper samma sträcka, Δx^0 , fast med olika metrik för tiden, g_{00} . Här är situationen beskriven i ett tvådimensionellt fall med en tidslik koordinat och en rumslik.

Obsevatören kommer alltså se olika färger beroende på $\sqrt{g_{00}}(p)$. Med andra ord, likadana atomer som befinner sig i olika starka gravitationsfält kommer ha olika färg.

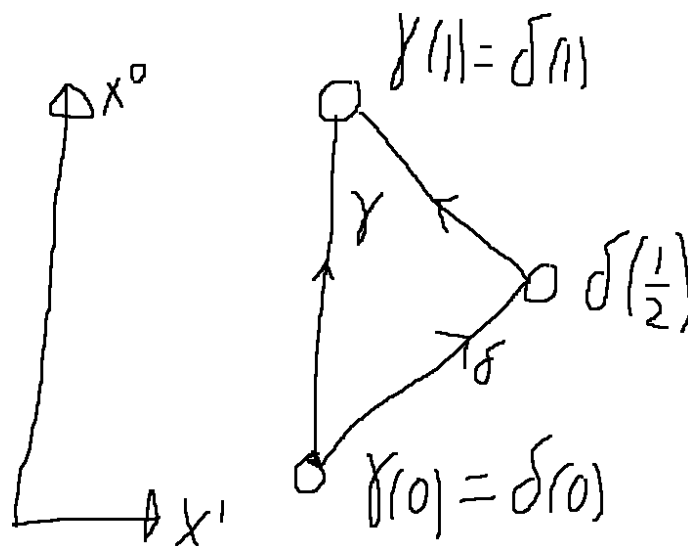
Effekten kallas för *gravitationellt röd-skifte* och namnet kommer av att ett starkare gravitationsfält kommer innebära att observatören mäter en längre periodtid. Frekvensen av ljuset sänks alltså, vilket i det synliga spektrumet innebär att färgen skiftas mot den röda änden.

Det går att mäta denna effekt men typiskt är den så liten att den försvinner jämfört med exempelvis Doppler-effekten.

8.2 Tvillingproblemet

Nu tar vi oss an ett litet kul problem som har fått stor uppmärksamhet inom populärvetenskapen. Vi föreställer oss två resenärer, Gamma och Delta. De

möts vid en händelse och startar var sitt tidtagarur. Därefter reser de längs var sin (givetvis tidslik) världslinje och återförenas i en annan punkt. I en viss karta ser Gammas resa ut som att hon är i vila och bara väntar på händelsen. Delta å andra sidan accelererar och flyger ut i en riktning, vänder där och accelererar åt andra hållet och återvänder sen till händelsen i vilken de möts. Se figur 13 för en skiss över situationen.



Figur 13: Gamma avancerar bara i tidskoordinaten, x^0 , medan Delta åker bort i x^1 -riktningen och sen vänder åter. De förenas så småningom i en punkt.

Denna situation har egentligen ingenting med gravitation att göra så den hade kunnat vara med i en kurs i speciell relativitetsteori. För att göra det enkelt så struntar vi i gravitation och sätter $g = dx^0 \otimes dx^0 - \sum dx^j \otimes dx^j$, ett specialfall som ofta betecknas $\eta_{\mu\nu}$.

Låt oss räkna ut hur lång tid som gått enligt Gammas tidtagarur. Vi parametriserar Gammas kurva, γ enligt

$$(123) \quad \begin{aligned} \gamma : (0, 1) \subset \mathbb{R} &\rightarrow M \\ \gamma^\mu(\lambda) &= (\lambda, 0, 0, 0)^\mu \end{aligned}$$

Vi räknar ut längden, S_γ , som alltså är tiden som tidtagaruret tar

$$\begin{aligned}
(124) \quad S_\gamma &= \int_0^1 d\lambda \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu} \\
&= \int_0^1 d\lambda \\
&= 1
\end{aligned}$$

Det var mycket enkelt i den metriken och den kurvan. Deltas kurva, δ blir jobbigare. Vi parametriserar den enligt

$$\begin{aligned}
(125) \quad \delta : (0, 1) \subset \mathbb{R} &\rightarrow M \\
\delta^\mu(\lambda) &= (\lambda, \alpha\lambda, 0, 0)^\mu, \quad \lambda < \frac{1}{2} \\
\delta^\mu(\lambda) &= (\lambda, \alpha(1 - \lambda), 0, 0)^\mu, \quad \lambda \geq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Där vi tagit accelerationen som oändlig över noll tid vid start, $\lambda = 0$, och vändpunkt, $\lambda = \frac{1}{2}$. Vi får då längden av kurvan, S_δ enligt

$$\begin{aligned}
(126) \quad S_\delta &= \int_0^1 d\lambda \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{\delta}^\mu \dot{\delta}^\nu} \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} d\lambda \sqrt{1 - \alpha^2} + \int_{\frac{1}{2}}^1 d\lambda \sqrt{1^2 - (-\alpha)^2} \\
&= \int_0^1 d\lambda \sqrt{1 - \alpha^2} \\
&= \sqrt{1 - \alpha^2}
\end{aligned}$$

Här märker vi alltså att Deltas tidtagarur inte gått lika långt som Gammas då de återförenas. Det är inte så märkligt. Två händelser i rumtiden binds samman med två olika kurvor som har olika längd och kurvans längd är vad som bestämmer hur lång tid som går.

9 Lektion: svarta hål

Nu kommer vi till vad många anser vara höjdpunkten av tillämpningarna av allmän relativitetsteori, *svarta hål*.

Vi har redan slagit fast att fältekvationerna är svårlösta, och att det krävs symmetrier för att vi ska ha en chans. Einstein sade själv att ingen förmodligen kommer finna en vettig lösning, annat än den mycket triviella som motsvarar ett tomt universum, då han publicerade sin teori 1915 e.Kr.

Karl Schwarzschild var vintern det året stationerad på östfron i kriget mot Ryssland. Han funderade över fältekvationerna och försökte finna den enklaste lösningen, en som är så symmetrisk man kan tänka sig men ändå inte tom.

9.0 Schwarzschild-metriken

Vi gör det så enkelt vi kan, förutom den triviella lösningen som är ett tomt universum, $R_{\mu\nu} = 0$. Vi tänker oss ett sfäriskt symmetriskt fält kring en sfäriskt symmetrisk kropp som vi låter vara i vila i ett statiskt koordinatsystem.

Ett statiskt koordinatsystem har konsekvenserna $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$ och $g_{0j} = 0$.

Vårt mål är att finna geometrin som den här kroppen orsakar. Vi vill alltså finna metriken. Vi ansätter den mest allmänna formen för metriken som bevarar den sfäriska symmetrin. Låt oss utgå från sfäriska koordinater, (t, r, θ, φ) . Då har vi kurvsegmentet

$$(127) \quad ds^2 = U dt^2 - V dr^2 - W r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2)$$

Där U, V, W är funktioner som endast kan bero av r (Beroende av vinklarna skulle bryta den sfäriska symmetrin och beroende av tiden har vi redan valt koordinater som hindrar). Vi skalar om uttrycket så att $W = 1$ genom att skala om r , så $W r^2 \rightarrow r^2$.

Nu skriver vi om det på en form som nu verkar konstig men som straxt blir användbar.

$$(128) \quad ds^2 = e^{2\nu} dt^2 - e^{2\lambda} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2$$

där ν, λ bara kan bero av r . Vi kan skriva metriken komponenter från detta genom att bara inspektera uttrycket. Den är som tur är diagonal (diagonal har inget att göra med "diagonalen i en matris" eller liknande dumheter, utan det betyder att det inte finns några termer på formen $dx^\alpha \otimes dx^\beta$ för $\alpha \neq \beta$).

$$\begin{aligned}
(129) \quad & g_{00} = e^{2\nu} \\
& g_{11} = -e^{2\lambda} \\
& g_{22} = -r^2 \\
& g_{33} = -r^2 \sin^2(\theta) \\
& g_{\mu\nu} = 0, \quad \mu \neq \nu
\end{aligned}$$

Vi kan finna dess reciprok också, $g^{\mu\nu}$ enligt

$$\begin{aligned}
(130) \quad & g^{00} = e^{-2\nu} \\
& g^{11} = -e^{-2\lambda} \\
& g^{22} = -\frac{1}{r^2} \\
& g^{33} = -\frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \\
& g^{\mu\nu} = 0, \quad \mu \neq \nu
\end{aligned}$$

Från dessa kan vi räkna ut alla förbindelsekoefficienter. Vi har enligt ekvation 38 metrikinducerade förbindelsekoefficienter

$$(131) \quad \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} \left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\sigma\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^\gamma} \right)$$

Från det kan vi, något plågsamt, räkna ut dem från vår metrik. Vi kommer som tur är fram till att bara några av de 64 är nollskilda

$$\begin{aligned}
(132) \quad & \Gamma^1_{00} = \partial_r \nu e^{2\nu-2\lambda} \\
& \Gamma^1_{11} = \partial_r \lambda \\
& \Gamma^1_{22} = -r e^{-2\lambda} \\
& \Gamma^1_{33} = -r \sin^2(\theta) e^{-2\lambda} \\
& \Gamma^0_{10} = \partial_r \nu \\
& \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} \frac{1}{r} \\
& \Gamma^3_{23} = \cot(\theta) \\
& \Gamma^2_{33} = -\sin(\theta) \cos(\theta)
\end{aligned}$$

Ja men se, där är ju alla.

Vi kan nu använda dem i definitionen för Ricci-tensorn.

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \left(-\partial_r^2 \nu + (\partial_r \nu)(\partial_r \lambda) - (\partial_r \nu)^2 - \frac{2\partial_r \nu}{r} \right) e^{2\nu-2\lambda} \\
R_{11} &= -\partial_r^2 \nu + (\partial_r \nu)(\partial_r \lambda) - (\partial_r \nu)^2 - \frac{2\partial_r \nu}{r} \\
R_{22} &= (1 + r\partial_r \nu - r\partial_r \lambda) e^{-2\lambda} - 1 \\
R_{33} &= [(1 + r\partial_r \nu - r\partial_r \lambda) e^{-2\lambda} - 1] \sin^2(\theta) \\
R_{\mu\nu} &= 0, \quad \mu \neq \nu
\end{aligned}
\tag{133}$$

Dessa måste ju alla försvinna utanför kroppen eftersom vi har tomrum där. Tomrum innebär ju $R_{\mu\nu} = 0$.

Första och andra raden innebär

$$\partial_r \lambda + \partial_r \nu = 0 \tag{134}$$

Ett fysikaliskt argument säger att rumtiden måste gå mot att bli platt, $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ mot oändligheten bort från kroppen ($r \rightarrow \infty$ alltså), så

$$\lambda + \nu = 0 \tag{135}$$

Sätter vi nu in $\partial_r \lambda = -\partial_r \nu$ i tredje raden så får vi villkoret

$$\begin{aligned}
(1 + 2r\partial_r \nu) e^{2\nu} &= 1 \implies \\
\partial_r (r e^{2\nu}) &= 1
\end{aligned}
\tag{136}$$

Vi löser den diffekvationen och får

$$r e^{2\nu} = r - 2m \tag{137}$$

där $2m$ är en konstant.

Med det försvinner alla raderna.

Vi kan nu skriva längden av vårt kurvsegment i gen

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2 \tag{138}$$

Detta kallas för *Schwarzschild-metriken* och var den första icke triviella lösningen på Einsteins fältekvationer som publicerades.

Vi har $g_{00} = 1 - \frac{2m}{r}$. Det reducerar till det Newtonska fallet i gränsen $r \rightarrow \infty$. Vi ser i de fallet att vårt val av konstant, $2m$, leder till att m är massan av kroppen som vi har undersökt.

Den uppmärksamme läsaren noterar något som händer vid $r = 2m$. Den radien kallas för *Schwarzschild-radien* och kommer att bli mycket intressant.

9.1 Svarta hål, utsidan

Det ser ut som att vår lösning blir singularär vid $r = 2m$, för då är $g_{00} = 0$ och $g_{11} = -\infty$. Detta är inte riktigt, och vi ska nu undersöka vad som egentligen händer där. Singulariteten kommer av koordinatval. Det enda sättet att avgöra om rumtiden har en singularitet är att undersöka krökningen, Riemann-Christoffel-tensorn, B . Vi ser emellertid såklart att $r = 0$ utgör en äkta singularitet.

Låt oss föreställa oss en resenär som faller in mot det svarta hålet. Hon börjar väl utanför, $r > 2m$, och faller helt radiellt inåt, $v^1 < 0$, $v^2 = v^3 = 0$.

Rörelsen bestäms som vanligt av den geodetiska ekvationen. Låt oss betrakta tidsdelen av den

$$(139) \quad \begin{aligned} \frac{dv^0}{ds} &= -\Gamma^0_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \\ &= -g^{00} \partial_1 g_{00} v^0 v^1 \end{aligned}$$

Vi kan använda att $g^{00} = \frac{1}{g_{00}}$ för att verka på båda sidor och få

$$(140) \quad g_{00} \frac{dv^0}{ds} + \frac{dg_{00}}{ds} v^0 = 0$$

Den här är ju egentligen bara $\frac{d}{ds}(g_{00}v^0)$ så det är bara att integrera. Vi får

$$(141) \quad g_{00}v^0 = k$$

för någon konstant, k , som alltså är referensvärde för g_{00} där resan startar. Vi använder att hastigheten alltid har enhetsstorlek

$$(142) \quad \begin{aligned} 1 &= g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \\ &= g_{00}(v^0)^2 + g_{11}(v^1)^2 \end{aligned}$$

Vi multiplicerar den här med g_{00} och minns från förra delen (se ekvation 138) att $g_{00}g_{11} = -1$. Då får vi

$$(143) \quad \begin{aligned} k^2 - (v^1)^2 &= g_{00} \\ &= 1 - \frac{2m}{r} \end{aligned}$$

Eftersom vi redan vet att $v^1 < 0$ (den faller ju inåt så radien minskar) så tar vi den negativa roten och vi får

$$(144) \quad v^1 = -\sqrt{k^2 - 1 + \frac{2m}{r}}$$

Vi kan nu ta kvoten av hastigheten i tidsriktningen och hastigheten i radiell riktning, vilket blir koordinathastigheten

$$(145) \quad \begin{aligned} \frac{dv^0}{dv^1} &= \frac{dv^0}{ds} \frac{ds}{dv^1} \\ &= \frac{dt}{dr} \\ &= -k \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1 + \frac{2m}{r}}} \end{aligned}$$

Låt oss för enkelhetens skull säga att vår resenär börjar straxt utanför Schwarzschild-radien, $r = 2m + \varepsilon$, med ε så litet att vi kan ignorera andra ordningen. Då har vi

$$(146) \quad \begin{aligned} \frac{dt}{dr} &= -\frac{2m}{\varepsilon} \\ &= -\frac{2m}{r - 2m} \end{aligned}$$

Detta kan vi ju integrera utan problem. Resultatet blir

$$(147) \quad t = -2m \ln(r - 2m) + C$$

Där C är någon konstant som inte är viktig för sammanhanget.

Om vi ska tolka det här så verkar det som att det tar en resenär oändlig tid att nå Schwarzschild-radien. Då $r \rightarrow 2m$ så har vi att $t \rightarrow \infty$. Om vi står utanför,

på avstånd, och betraktar resenären som faller in så kommer det se ut som att hon saktar ned. Ett tidtagarur som hon håller i handen skulle se ut att sakta ned. Färgerna skulle rödskiftas (som vi minns med en faktor $\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}$).

En viktig poäng här är att vi mätt t som är koordinattiden. Hur uppfattar vår resenär det själv? För det måste vi mäta egentiden, alltså den tid som gått på resenärens eget tidtagarur. Vi mäter alltså åter längden av det segmentet av världslinjen.

$$(148) \quad \frac{ds}{dr} = \frac{1}{v^1} = -\sqrt{k^2 - 1 + \frac{2m}{r}}$$

Integrerar vi den här så får vi att resenären når Schwarzschild-radien på en ändlig tid. Vad som händer henne senare vet ingen. Ingen världslinje, varken tidslik eller ljuslik, kan gå från insidan av Schwarzschild-radien och komma ut, så ingen information kan läcka ur ett svart hål. Därför kan bara de som är där inne veta. De kanske har ett kalas utan oss och vi får aldrig veta om det ens om vi är bjudna, önskade och saknade.

9.2 Svarta hål, insidan

Vi har redan konstaterat att singulariteten vid $r = 2m$ är en artefakt av våra koordinater. För att vidare undersöka området kring $r = 2m$ och innanför, alltså inuti det svarta hålet, måste vi byta koordinater. Tyvärr tvingas vi använda ostatiska koordinater, så att $\partial_0 g_{\mu\nu} \neq 0$. Vi lämnar vinkelkoordinaterna oförändrade men byter de tidslika och radiella koordinaterna mot

$$(149) \quad \begin{aligned} \tau &= t + f(r) \\ \rho &= t + g(r) \end{aligned}$$

Med några funktioner f och g . Vi vill nu finna ett förhållande mellan dessa. Vi tar

$$(150) \quad \begin{aligned} d\tau^2 - \frac{2m}{r}d\rho^2 &= (dt + (\partial_r f)dr)^2 - \frac{2m}{r}(dt + (\partial_r g)dr)^2 \\ &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + 2\left(\partial_r f - \frac{2m}{r}\partial_r g\right)dtdr + \\ &\quad + \left[(\partial_r f)^2 - \frac{2m}{r}(\partial_r g)^2\right]dr^2 \\ &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)}dr^2 \end{aligned}$$

Nu har vi ett förhållande mellan något uttryckt i det gamla kända och det nya okända. Vi väljer våra funktioner, f och g så att

$$(151) \quad \partial_r f = \frac{2m}{r} \partial_r g$$

och

$$(152) \quad \frac{2m}{r} (\partial_r g)^2 - (\partial_r f)^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)}$$

Vi använder dessa två ekvationer för att lösa ut $\partial_r g$ och får

$$(153) \quad \partial_r g = \sqrt{\frac{r}{2m}} \frac{1}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)}$$

Den här är eländig men vi kan integrera den. Sätt $r = y^2$ ($r > 0$ gäller alltid) och $2m = a^2$. Nu får vi

$$(154) \quad \begin{aligned} \frac{dg}{dy} &= 2y \frac{dg}{dr} \\ &= \frac{2y^4}{a(y^2 - a^2)} \end{aligned}$$

Detta kan vi integrera. Vi gör det och får

$$(155) \quad g = \frac{2}{3a} y^3 + 2ay - a^2 \ln \left(\frac{y+a}{y-a} \right)$$

Vi har även

$$(156) \quad \begin{aligned} \partial_r(g - f) &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \partial_r g \\ &= \sqrt{\frac{r}{2m}} \end{aligned}$$

Det kan vi integrera det med

$$(157) \quad \begin{aligned} \frac{2}{3\sqrt{2m}} r^{\frac{3}{2}} &= g - f \\ &= \rho - \tau \end{aligned}$$

Inför nu förkortningen $\mu = \left(\frac{3}{2}\sqrt{2m}\right)^{\frac{2}{3}}$. Då har vi

$$(158) \quad r = \mu(\rho - \tau)^{\frac{2}{3}}$$

Nu har vi allt vi behöver för att ta vår gamla metrik uttryckt i (t, r, θ, φ) och uttrycka den i $(\tau, \rho, \theta, \varphi)$.

$$(159) \quad ds^2 = d\tau^2 - \frac{2m}{\mu(\rho - \tau)^{\frac{2}{3}}} d\rho^2 - \mu^2(\rho - \tau)^{\frac{4}{3}}(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2)$$

Vi ser att vår tidigare singularitet vid $r = 2m$ här motsvaras av $\rho - \tau = \frac{4m}{3}$. Det finns inte längre någon singularitet där. Singulariteten var alltså inte verklig utan en koordinatartefakt. Sådana kallas ofta för *koordinatsingulariteter*.

Eftersom vi kan transformera tillbaka denna metrik på vår gamla vet vi att den stämmer för $r > 2m$. Kan den säga något om $r < 2m$? Egentligen kan vi inte veta det, med samma argument som tidigare. Ingen har varit där som kan berätta det för oss. Rent matematiskt kan vi dock beskriva området med den här modellen. Låt oss göra det.

Den viktigaste egenskapen är att tidslika riktningen nu gör att ljuskonerna är lutade inåt, mot kroppen, snarare än vad vi har blivit vana vid, alltså att de lutar mot framtiden. Detta innebär att tidslika kurvor, sådana som alla massiva partiklar, och därför observatörer, följer oundvikligen går inåt mot kroppen. Då man passerar $r = 2m$ finns ingen återvändo.

10 Lektion: visualisering av rumtid och svarta hål

Att beskriva hela rumtiden är ibland obehändigt, men det finns tekniker för att kunna rita vissa rumtider på ett halvt ark papper. En sådan metod är *Penrose-diagram*. Dit vill vi komma, men först vill vi få bort den jobbiga egenskapen att vi har en koordinatsingularitet vid $r = 2m$. Denna kommer av att vi där avbildar oändligheter på en punkt. Om vi i stället kan rycka i oändligheterna så att vi inte gör det så blir det enklare. Det gör vi med koordinattransformer.

10.0 Radiella ljuslika geodeter

Vi vill nu studera hur ljus faller in i svarta hål. Vi betraktar alltså nollgeodeter i Schwarzschild-metriken. De uppfyller, som vi vet, alltid $g(v_\gamma, v_\gamma) = 0$. Enligt principen för stationär verkan har vi att variationen, δS skall försvinna för verkan

$$(160) \quad S[\gamma] = \int d\lambda \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\dot{\phi}^2) \right]$$

Där uttrycket inom hakparenteser försvinner eftersom det är en ljuslik kurva. Vi kan från lagrangianen få ut rörelseekvationerna. För t får vi genom att derivera med avseende på $\dot{t}$ och inse att resten inte beror av t att

$$(161) \quad \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} = k$$

För någon konstant, k .

Om vi nu tänker oss radiellt riktat ljus, alltså φ och θ konstanta, så får vi från tidens rörelseekvation även den radiella. Vi får

$$(162) \quad \dot{r}^2 = k^2$$

Med lösningar $\dot{r} = \pm k$. Vi kan alltså skriva $r(\lambda) = \pm k \cdot \lambda$, eventuellt med någon konstant term. Vi noterar att detta är en affin ekvation av kurvparametern. Vi kan alltså parametrisera kurvan med r i stället för λ . Vi gör det och byter

$$(163) \quad t(\lambda) \rightarrow \tilde{t}(r) = t(\pm k\lambda)$$

Vi får alltså skilja mellan fallen $+$ och $-$.

Låt oss börja med +

$$\begin{aligned}
 \frac{d\tilde{t}}{dr} &= \frac{\frac{d\tilde{t}}{d\lambda}}{\dot{r}} \\
 (164) \qquad &= \frac{k}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right) k} \\
 &= \frac{r}{r - 2m}
 \end{aligned}$$

Vi får alltså, om vi löser för $\tilde{t}$

$$(165) \qquad \tilde{t}_+(r) = r + 2m \ln |r - 2m| + \text{konstant}$$

På liknande sätt får vi för fallet −

$$(166) \qquad \tilde{t}_-(r) = -r - 2m \ln |r - 2m| + \text{konstant}$$

Dessa geodeter kallas för utgående respektive infallande nollgeodeter.

Se figur 14 för en skiss över infallande och utgående nollgeodeter i Schwarzschild-metriken.

10.1 Eddington-Finkelstein-koordinater

Vi vill nu studera de infallande nollgeodeterna. Med ett koordinatbyte kan vi få dem att sluta kröka sig och i stället bete sig som rätta linjer i våra diagram.

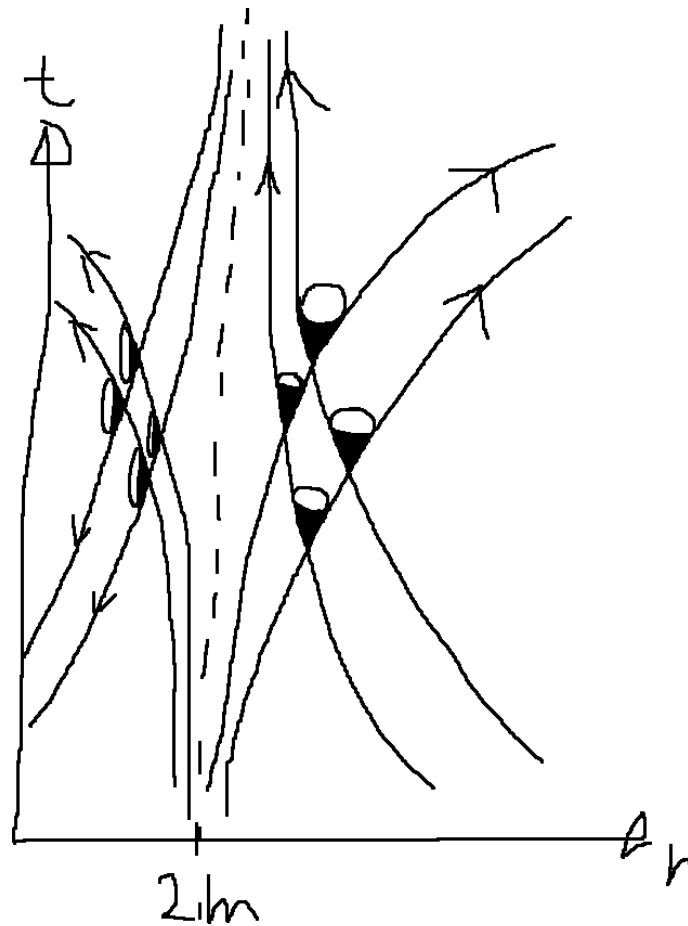
Vi inför en ny koordinat

$$(167) \qquad \bar{t} = t + 2m \ln |r - 2m|$$

Vi skriver ekvationen för $\tilde{t}_-$ i ny koordinat och får att logaritmttermerna tar ut varandra

$$(168) \qquad \bar{t}_- = -r + \text{konstant}$$

I dessa koordinater är händelsehorisonten, Schwarzschild-radien, med i kartdomänen.



Figur 14: Infalande och utgående ljuslika geodeter för Schwarzschild-metriken. Två koordinater är undertryckta så bara den tidslika och den radiella visas. Där de två riktningarna för ljuset möts är framåtriktade ljuskoner inritade. Notera hur de lutar på insidan av Schwarzschild-radien. Där tar radien rollen av en tidslik koordinat.

Vi räknar om Schwarzschild-metriken i dessa nya koordinater som vi kallar för *Eddington-Finkelstein-koordinater*. Vi har sett hur vi ändrar $t \rightarrow \bar{t}$, de andra koordinaterna förblir oförändrade. Vi kan enkelt gå mellan olika metriker med vektortransform. Om vi kallar de gamla koordinaterna för x^μ och de nya för y^μ så har vi

$$(169) \quad g(y)_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} g(x)_{\alpha\beta}$$

Transformfaktorerna är diagonala med alla andra komponenter 0 förutom

$$(170) \quad \frac{\partial y^0}{\partial x^1} = \frac{2m}{r - 2m}$$

Vi räknar med detta ut metriken, som alltså kommer innehålla blandtermer

$$(171) \quad ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) d\bar{t}^2 - \frac{2m}{r} (d\bar{t}dr + drd\bar{t}) - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2)$$

Se figur 15 för en skiss över de infallande och utgående ljuslika kurvorna.

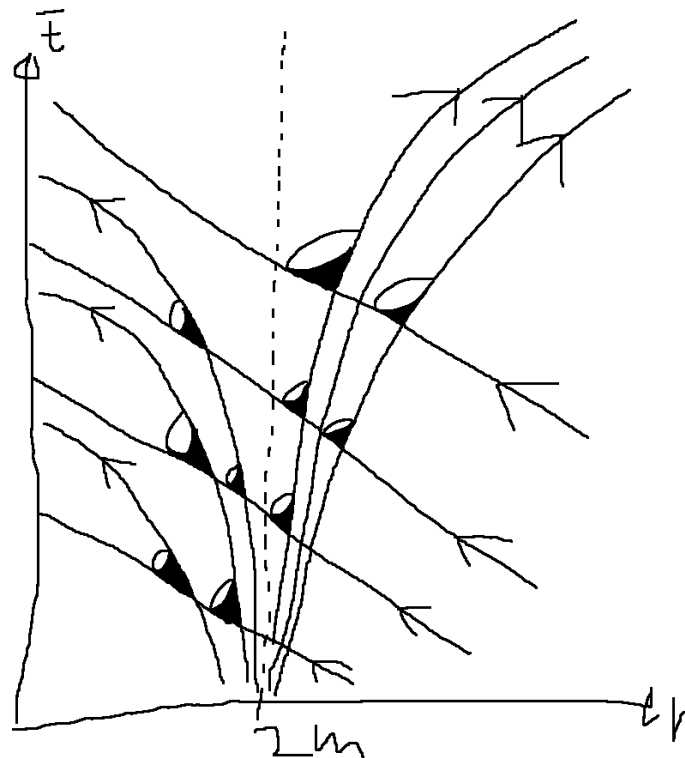
10.2 Kruskal-koordinater

Med en annan transform kan vi även få de utgående nollgeodeterna att avbildas på rätta linjer. För en ordentlig härledning av dessa koordinater, se exempelvis [Wal84]. Vi byter en tidslik, t , och en rumslik, r , koordinat mot ett par nya, T respektive X som definieras av

$$(172) \quad \begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{r}{2m} - 1} e^{\frac{r}{4m}} \sinh\left(\frac{t}{4m}\right) \\ X &= \sqrt{\frac{r}{2m} - 1} e^{\frac{r}{4m}} \cosh\left(\frac{t}{4m}\right) \end{aligned}$$

I regionen $r < 2m$ och

$$(173) \quad \begin{aligned} T &= \sqrt{1 - \frac{r}{2m}} e^{\frac{r}{4m}} \cosh\left(\frac{t}{4m}\right) \\ X &= \sqrt{1 - \frac{r}{2m}} e^{\frac{r}{4m}} \sinh\left(\frac{t}{4m}\right) \end{aligned}$$



Figur 15: Skiss över de infallande och utgående nollgeodeterna. Framåtriktade ljuskoner är inritade vid vissa korsningar. Notera hur de infallande kurvorna nu är rätta linjer i diagrammet med lutning -1 .

Denna lösning utökar Schwarzschild-lösningen och tillåtna koordinatvärden är

$$(174) \quad \begin{aligned} -\infty < X < \infty \\ -\infty < T^2 - X^2 < 1 \end{aligned}$$

Alla ljuslika kurvor har lutning ± 1 , vilket gör det enkelt att studera kausalitet och liknande. Vi noterar att även Schwarzschild-radien har sådan lutning.

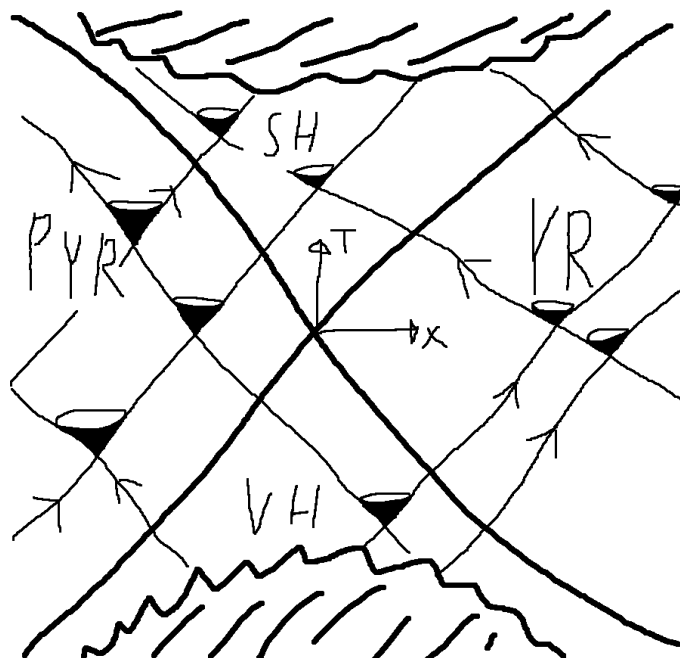
Dessa koordinater tillåter, med analytisk fortsättning, att rumtiden utökas till ett par regioner som vi tidigare inte kunde se. Med maximal utökning får vi fyra regioner, se tabell 0. Vi har alltså den vanliga yttre regionen och insidan av det svarta hålet. Till det kommer en parallell yttre region som liknar den vi lever i och ett *vitt hål*, som ingenting kan stanna i. Det vita hålet är alltså motsatsen mot det svarta hålet. Det svarta hålet suger in, det vita hålet spottar ut.

För en skiss över dessa regioner, se figur 16.

En otrevlig sak med att rita Kruskal-koordinater på papperet är att vi måste

Tabell 0: Regioner av Schwarzschild-rumtiden i Kruskal-koordinater.

Region	Villkor för T	Region i r
Yttre region	$-X < T < X$	$r > 2m$
Inuti svart hål	$ X < T < \sqrt{1 + X^2}$	$2m > r > 0$
Parallell yttre region	$X < T < -X$	$r > 2m$
Inuti vitt hål	$-\sqrt{1 + X^2} < T < X $	$2m > r > 0$



Figur 16: Skiss över de fyra regionerna med infallande och utgående ljuslika kurvor, som nu båda har lutning ± 1 . Framåtriktade ljuskoner är inritade vid korsningar av ljuslika geodeter. Singulariteterna blir en tvåmantlad hyperboloid (ritad som en sned-streckad region), och tangenterna till den (ritade som två tjocka diagonala linjer som korsas i mitten) delar upp rumtiden i fyra regioner. I det vita hålet (markerat VH) är alla ljuskoner riktade i väg från singulariteten så att tidslika och ljuslika kurvor måste lämna regionen. I de yttre regionerna (markerade med YR och PYR för yttre region respektive parallell yttre region) kan ljuslika och tidslika geodeter antingen undvika det svarta hålet (markerat BH). Inom det svarta hålet är alla ljuskoner riktade mot singulariteten, vilket innebär att ljus, såväl som materia oundvikligen störtar mot singulariteten.

använda oändligheterna och därför inte får plats på ett papper. Vi vill nu ställa det till rätta.

10.3 Penrose-diagram

En trevlig egenskap som vi vill behålla i våra diagram är att ljuslika kurvor har lutning ± 1 så att ljuskonerna bildar timglas på papperet.

Låt oss nu försöka skapa ett diagram i några steg. Litet[†] abstrakt kan vi säga att vi skapar två ljuslika koordinater, roterar diagrammet så att de är på axlarna, sen trycker vi ihop dem så att de är ändliga, sen roterar vi tillbaka. Viktigt genom hela dena procedur är att hålla koll på gränserna för koordinaterna då vi förändrar dem.

Vi tar en metrik given i några koordinater. Sen finner vi koordinater så att två okompakta (alltså det tillåtna intervallet för dem är inte kompakt) koordinater och ersätt dem med två (lika okompakta) ljuslika koordinater, alltså sådana vars inducerade basvektor har längden 0. Säg koordinat b som inducerar basvektor i tangentrummet, ∂_b . Den skall uppfylla $g(\partial_b, \partial_b) = 0$.

Sedan gör vi dessa två koordinater kompakta genom att använda någon lämplig avbildning. $\arctan$ visar sig vara en som är lämplig i det vanliga fallet att vi vill avbilda $(-\infty, \infty)$ på $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Nu tar vi dessa två nya kompakta koordinater, p och q och inför $T = p + q$ och $X = p - q$.

Uttryck nu metriken i termer av dessa nya koordinater. Om den får formen

$$(175) \quad ds^2 = \frac{1}{\Omega(T, X, \dots)^2} (dT^2 - dX^2 - R(T, X)(\dots d\theta^2 + \dots d\varphi^2))$$

(Ω^2 är en glatt, aldrig försvinnande funktion.) Då kan vi få det icke-fysikaliska diagrammets metrik

$$(176) \quad ds_{if}^2 = dT^2 - dX^2$$

Notera här att mycket undertryckts här. Stegen vi genomfört bevarar lutningen av ljuslika kurvor men den kan ha förvridit en hel del annat. Mer konkret så kan den ha förändrat tidslika geodeter.

Något positivt har ändå kommit av det. Vi kan i alla fall rita en tidslik och en rumslik koordinat, få plats med hela rumtiden på ett halvt ark papper och bevara ljuskonernas lutning.

[†]Egentligen är detta en extremt abstrakt beskrivning. Läsaren ombeds att inte ta den på allvar och i stället försöka förstå förfarandet som presenteras på en djup nivå.

10.4 Minkowski-metrik i Penrose-diagram

Vi tar vanliga sfäriska koordinater,

$$(177) \quad ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2)$$

Vi noterar koordinaternas intervall. $t \in (-\infty, \infty)$, $r \in (0, \infty)$, $\theta \in (0, \pi)$ och $\varphi \in (0, 2\pi)$.

Nu konstruerar vi ljuslika koordinater

$$(178) \quad \begin{aligned} v &= t + r \\ w &= t - r \end{aligned}$$

Är dessa ljuslika? Sätt in dem i metriken för att testa! De är ljuslika.

Vi såg att r inte är negativ. Skriver vi r i termer av v och w får vi $r = \frac{v-w}{2}$, vilket leder till villkoret $w < v$.

Nu ska vi göra dessa nya koordinater kompakta. Vi inför (med ett lämpligt val av kompaktifieringsfunktion)

$$(179) \quad \begin{aligned} p &= \arctan(v) \\ q &= \arctan(w) \end{aligned}$$

Vi vet att $\arctan$ är monoton så villkoret $w < v$ bevaras som $q < p$. Detta innebär att det finns kombinationer i definitionsmängden, $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ som är otillåtna.

Nu konstruerar vi

$$(180) \quad \begin{aligned} T &= p + q \\ X &= p - q \end{aligned}$$

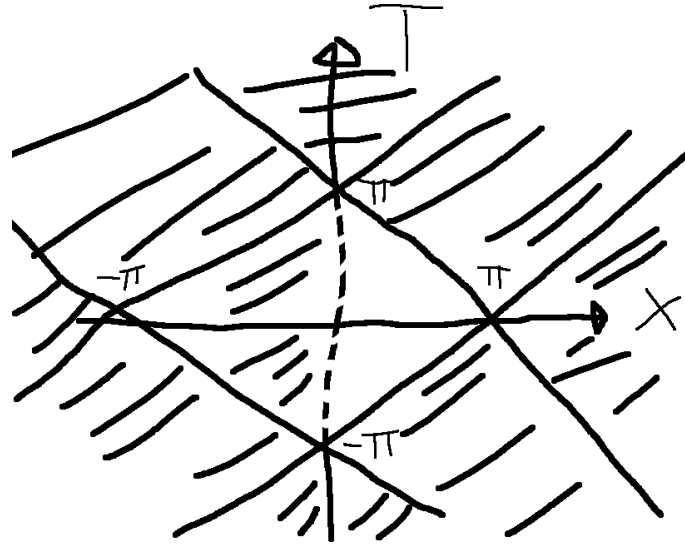
Med villkoren

$$(181) \quad \begin{aligned} -\frac{\pi}{2} &< \frac{1}{2}(T + X) < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} &< \frac{1}{2}(T - X) < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}(T - X) &< \frac{1}{2}(T + X) \end{aligned}$$

som vi skriver om dem som

$$(182) \quad \begin{aligned} \pi &< (T + X) < \pi \\ \pi &< (T - X) < \pi \\ x &> 0 \end{aligned}$$

Se figur 17 för en skiss över regionen. Nu skriver vi metriken i de nya koordinaterna får vi



Figur 17: Skiss över regionen där Kruskal-koordinaterna är giltiga för Minkowski-metriken. Området bildar en triangel mellan punkterna (på formen (T, X)) $(-\pi, 0)$, $(\pi, 0)$ och $(0, \pi)$, där linjen $X = 0$ är exkluderad. I snedstreckade regioner är Kruskal-koordinaterna alltså inte giltiga.

$$(183) \quad ds^2 = \frac{1}{4 \tan^2 \left[\frac{1}{2}(T + X) \right] \tan^2 \left[\frac{1}{2}(T - X) \right]} \cdot \{ dT^2 - dX^2 - \sin^2(X) [d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2] \}$$

Om vi nu ritar koordinaterna T och X så får vi en triangulär region som representerar hela rumtiden.

Vi kan identifiera några punkter i diagrammet som är av intresse.

Vid $T = 0$, $X = \pi$ har vi *rumslig oändlighet*. Det är alltså sfären som består av koordinater som är oändligt långt bort från origo. Denna betecknas i^0 .

Vid $X = 0$, $T = -\pi$ har vi *gången tidslig oändlighet*. Det är alltså det som skedde i början. Den betecknas i^- och på samma sätt har vi *framtida tidslig oändlighet*. Det är koordinater oändligt långt i framtiden.

Diagonalerna betecknas $\mathcal{J}^+$ och $\mathcal{J}^-$ för den övre respektive nedre. Dessa kallas för *nolloändligheterna*.

En tidslik kurva går $i^- \rightarrow i^+$, med riktning hela tiden inuti ljuskonerna, alltså alltid mer än 1 eller mindre än -1 .

En ljuslik kurva går från $\mathcal{J}^- \rightarrow \mathcal{J}^+$ med riktning längs ljuskonen, alltså lutning ± 1 .

En rumslik kurva går från $i^0 \rightarrow i^0$ med riktning utanför ljuskonen, alltså med lutning på mer än -1 men mindre än 1 .

Med ljuskonernas bevarade lutning blir det enkelt att diskutera kausala relationer. Vilka händelser går att tidsordna, vilka punkter kan påverka andra, hur kan information färdas?

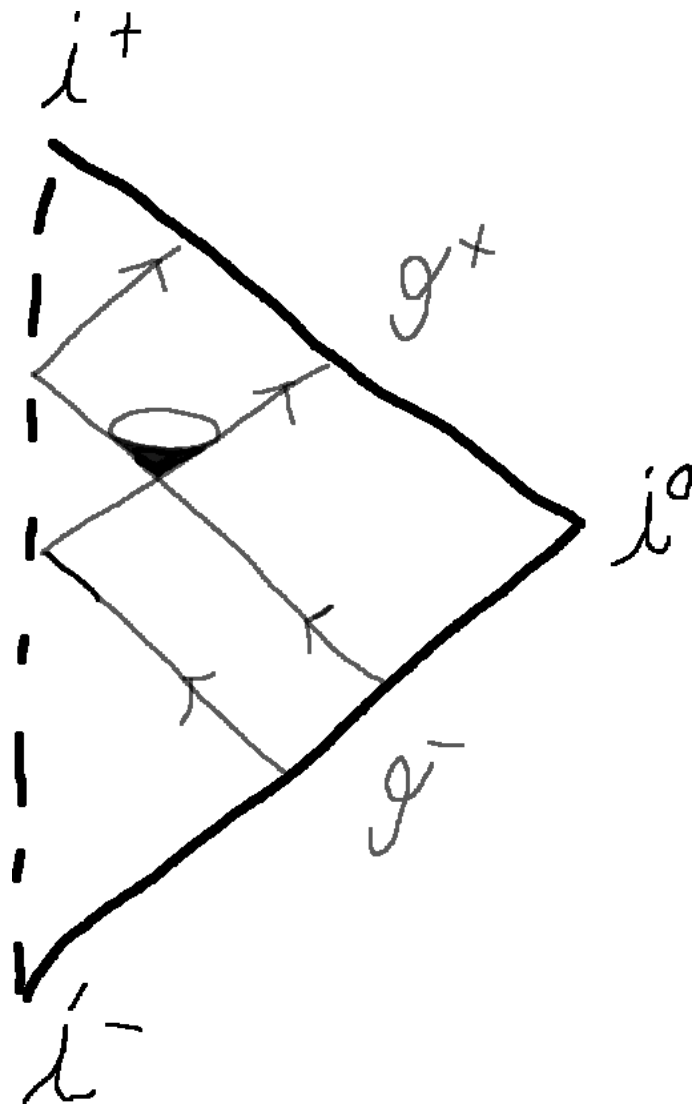
Se figur 18 för en skiss över regionen med intressanta punkter utritade.

10.5 Schwarzschild-metrik i Penrose-diagram

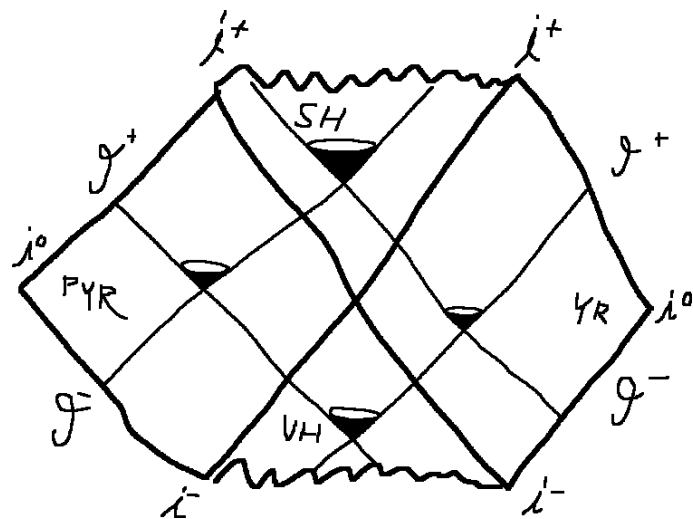
Innan vi fortsätter går vi tillbaka till figur 16, och försöker rita ett Penrose-diagram av den med Kruskal-koordinater maximalt utökade Schwarzschild-metriken. Resultatet visas i figur 19.

10.6 Gravitationell kollaps i Penrose-diagram

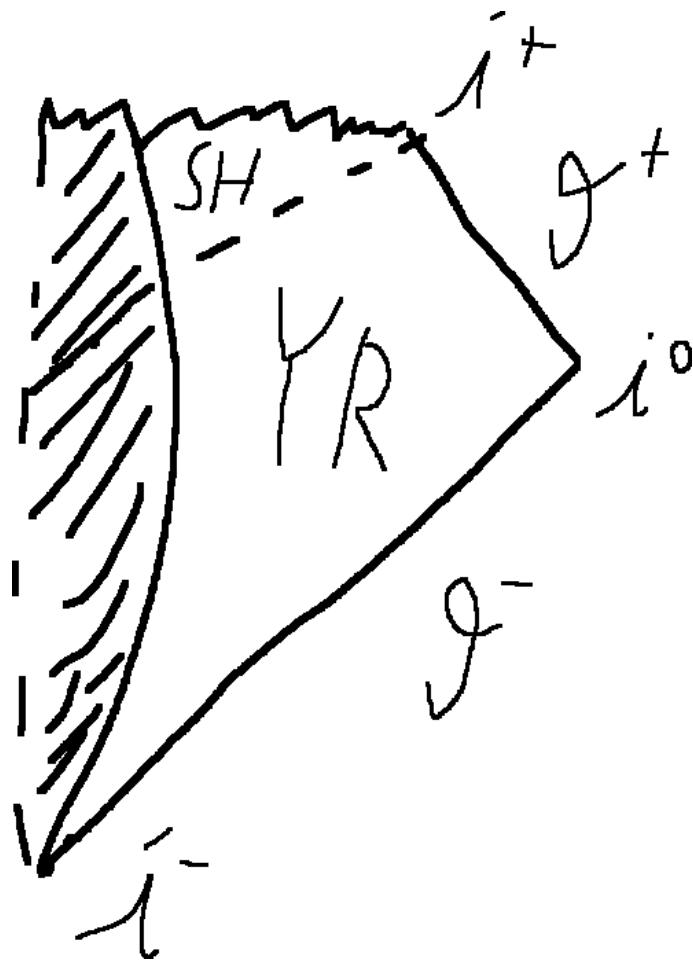
Låt oss avsluta visualiseringen av svarta hål med att diagrammatisera formationen av ett svart hål. Vi tänker oss att massa ansamlas och krymper ned tills den är innesluten i sin Schwarzschild-radie. Då har vi kommit till ett svart hål. Då det svarta hpket har formats kan ingenting fly ur Schwarzschild-radien. På så vis blir en ljus-signal från radien vid ögonblicket då det blir ett svart hål ett slags gräns för innanför och utanför det svarta hålet. Detta illustreras i figur 20.



Figur 18: Skiss över rumtiden med Minkowski-metrik. Utritad är även ett par ljuslika geodeter, som såklart har lutningen ± 1 .



Figur 19: Penrose-diagram över den med Kruskal-koordinater maximalt utökade Schwarzschild-lösningen. Intressanta punkter är utritade och även ett fåtal nollgeodeter och framåtriktade ljuskoner där de korsar. Precis som i figur 16 är de fyra regionerna utmarkerade och avskilda med breda diagonala räta linjer som korsar i mitten.



Figur 20: .

Tabell 1: Fall av svarta hål uppdelade på om deras laddning, C , och rörelsemängdsmoment, J , är nollskilda.

Metrikens namn	$C = 0?$	$J = 0?$
Schwarzschild	nej	nej
Kerr	nej	ja
Reissner-Nordström	ja	nej
Kerr-Newman	ja	ja

11 Lektion: exotiska svarta hål

Som om det inte var nog med de svarta hål vi redan stött på. Nu ska vi fundera på svarta hål med elektrisk laddning och svarta hål som roterar. Schwarzschild-metriken representerade det enklaste fallet, sfäriskt symmetriskt och bara en massa. Vi sammanfattar fallen vi ska undersöka.

Dessa metriker är ganska krångliga att härleda så vi kommer ta en del genvägar och bara se till deras konsekvenser.

11.0 Reissner-Nordström-metriken

Ett laddad men inte snurrande svart hål har en metrik som vi kan skriva som

$$(184) \quad ds^2 = \Delta dt^2 - \frac{1}{\Delta} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

där vi infört förkortningen $d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2 = d\Omega^2$ vilken är mycket användbar för sfärisk symmetri. Δ är ny grej

$$(185) \quad \Delta = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{p^2 + q^2}{r^2}$$

Här har vi p som är kroppens magnetiska laddning och q som är dess elektriska laddning. Det bör sägas att ingen någonsin observerat en magnetisk laddning[†] men det hejdar oss inte från att ta hänsyn till den. I fall den skulle finnas så finns en plats för den i teorin förberedd.

Vi har fortfarande att vid $r \rightarrow \infty$ återfår vi platt rumtid.

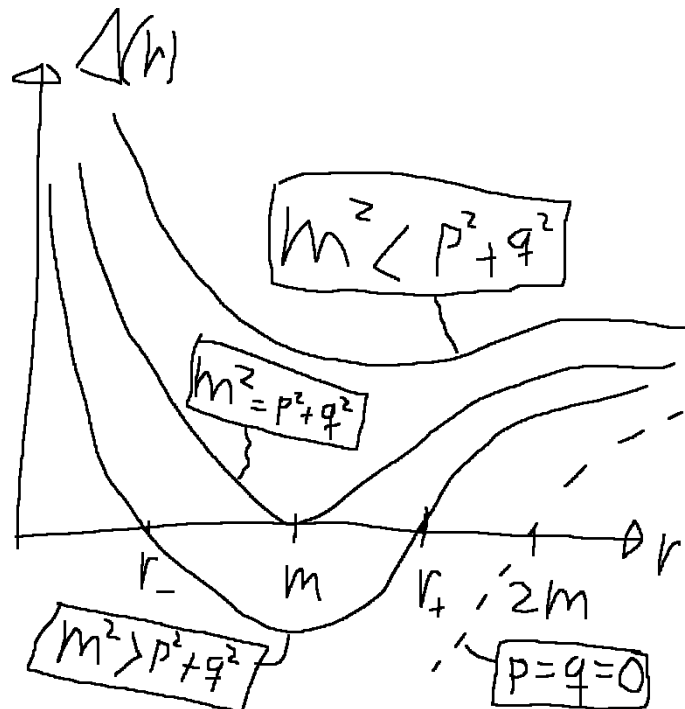
Vid $r = 0$ finns fortsatt en äkta singularitet och den har vi alltid där.

Motsvarande schwarzschild-radialen får vi nu när $\Delta = 0$. Detta händer vid

[†]Magnetiska monopoler var ett stort intresse för Dirac. Enligt Maxwells ekvationer är det magnetiska fältet divergensfritt, alltså ingen laddningstäthet får finnas. Detta får konsekvensen att alla integralkurvor till magnetiska fältet alltid är slingor, se kapitel 15 för definition av integralkurvor.

$$(186) \quad r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - (p^2 + q^2)}$$

Vi delar upp i tre fall. Se figur 21 för en skiss över situationen.



Figur 21: Skiss över de tre fallen, med Δ inritad som en funktion av r . Fallet $p = q = 0$ är med som en streckad variant. Det fallet motsvarar Schwarzschild-metriken som vi redan har studerat.

11.0.0 Fall: $m^2 < p^2 + q^2$

I detta fall är Δ alltid positiv. Det finns ingen motsvarande Schwarzschild-radie. Singulariteten finns alltså vid $r = 0$ såklart, men det finns inget som hejdar en resenär från att resa dit och sen komma tillbaka. En tidslik geodet kommer dock aldrig till $r = 0$ utan endast ljuslika kurvor och tidslika kurvor som påverkas av yttre krafter (som alltså avviker från geodeter) kommer kunna nå den. Denna typ av singularitet kallas för en *naken singularitet*.

11.0.1 Fall: $m^2 > p^2 + q^2$

Här får vi att Δ är positivt för stora och små r , men negativ inuti en region, $r \in (-\sqrt{m^2 - (p^2 + q^2)}, \sqrt{m^2 - (p^2 + q^2)})$. vars randpunkter är där $\Delta = 0$. Metriken vi tecknat ovan har koordinat-singulariteter vid dessa punkter men de är inga riktiga singulariteter.

Båda hypertyorna som utgörs av $r_{\pm} = \pm\sqrt{m^2 - (p^2 + q^2)}$ är händelsehorisonter, på samma sätt som Schwarzschild-radien. Ljuskonerna i denna region är alltså

lutade så att tidslika kurvor måste gå från den ena regionen till den andra. Här är alltså ett mycket intressant fall. Om vi utifrån går in i regionen måste vi in på dess insida. Väl där, om vi inifrån går in i regionen måste vi ut på dess utsida. Vi kastas hela vägen in och sen hela vägen ut i gen.

Högst kuriöst, minst sagt. Besynnerligt.

11.0.2 Fall: $m^2 = p^2 + q^2$

Detta kallas för *extremt svart hål*. Massan är perfekt balanserad mot laddningen av kroppen. Detta gör det till inte mycket mer än en matematisk leksak. Här har vi $\Delta = 0$ vid $r = m$. Detta är emellertid ingen händelsehorisont eftersom om vi studerar metriken ser vi att den tidslika koordinaten inte ändras då vi passerar den. Ljuskonerna börjar inte luta in mot hålet.

Konkret innebär detta att en resenär kan ta sig innanför denna radie och sen lämna i gen.

11.1 Kerr-metriken

Nu låter vi kroppen vara neutralt laddad, men låter den snurra i stället (runt i φ -riktningen). Vi får den krångliga metriken (att härleda den är ett helvete som man måste igenom, men ni slipper)

(187)

$$ds^2 = dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 + (r^2 + J^2) \sin(\theta) d\varphi^2 + \frac{2mr}{\rho^2} (J \sin^2(\theta) \varphi - dt)^2$$

Nej, den här var inte rolig. Fy och blå! vi har bland-termer (odagonal metrik). Δ och ρ fås enligt

(188)

$$\begin{aligned} \Delta &= r^2 - 2mr + J^2 \\ \rho^2(r, \theta) &= r^2 + J^2 \cos^2(\theta) \end{aligned}$$

Där J är ett mått på hur mycket den snurrar. Vi ser att om vi låter $J = 0$ så återfår vi Schwarzschild-metriken.

Här kommer vi faktiskt att avbryta av en enkel anledning. Det är ungefär lika lätt att betrakta denna metrik, som kallas för *Kerr-metriken*, som det är att lägga till laddning till den.

11.2 Kerr-Newman-metriken

Vi ersätter

$$(189) \quad 2mr \rightarrow 2mr - (q^2 + p^2)$$

och får

$$(190) \quad ds^2 = dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 + (r^2 + J^2) \sin^2(\theta) d\varphi^2 + \\ + \frac{2mr - (p^2 + q^2)}{\rho^2} (J \sin^2(\theta) \varphi - dt)^2$$

Som kallas för *Kerr-Newman-metriken*. Vi kan se att om vi tar bort laddningen och rotationen så återfår vi Schwarzschild-metriken. Tyvärr kommer inte den laddade delen att ge oss några fler intressanta fenomen så vi går tillbaka till $p^2 + q^2 = 0$, alltså en snurrande men oladdad kropp.

Vi stannar för en stund och funderar över koordinaterna (t, r, θ, φ) . De som vår metrik är uttryckta i kallas för *Boyer-Lindquist-koordinater*.[†] Om vi låter J vara oförändrat men låter $m \rightarrow 0$ så får vi platt rumtid, men inte i våra vanliga sfäriska koordinater utan litet annorlunda. Vi får

$$(191) \quad ds^2 = dt^2 - \frac{(r^2 + J^2 \cos^2(\theta))^2}{r^2 + J^2} dr^2 - \\ - (r^2 + J^2 \cos^2(\theta))^2 d\theta^2 + (r^2 + J^2) \sin^2(\theta) d\varphi^2$$

Inga blandtermer mer! Vi känner igen dessa koordinater som ellipsoida i euklidisk 3-rym

$$(192) \quad x = \sqrt{r^2 + J^2} \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ y = \sqrt{r^2 + J^2} \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ x = r \cos(\theta)$$

Låt oss fundera över Kerr-metriken. Den verkar ha singulariteter vid $\Delta = 0$ och $\rho = 0$.

En undersökning av Δ leder oss, precis som för Reissner-Nordström-metriken till tre fall.

$m^2 < J^2$ ger oss åter en naken singularitet, precis som för Reissner-Nordström-metriken.

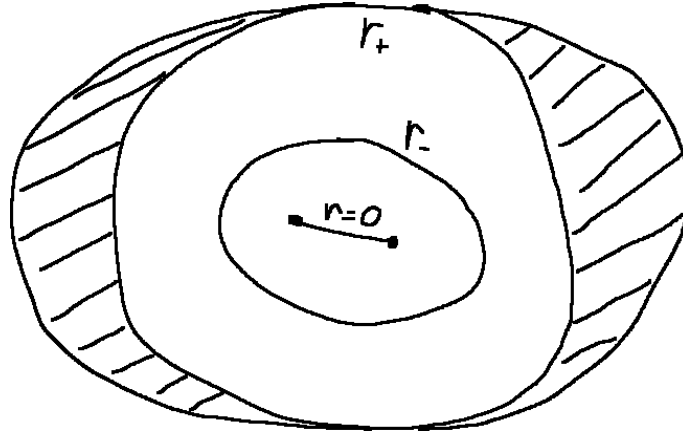
[†]Boyer som de är uppkallade efter dog i en mass-skjutning i University of Texas at Austin 1966 e.Kr.

$m^2 = J^2$ är instabil, precis som för Reissner-Nordström-metriken.

Låt oss i stället studera det tredje fallet.

Tar vi $m^2 > J^2$ får vi, precis som för Reissner-Nordström-metriken en region i vilken $\Delta < 0$, med $\Delta = 0$ på randen till denna, $r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - J^2}$. Båda dessa kommer utgöra händelsehorisonter, men de är inga äkta singulariteter. Situationen är likadan som för Reissner-Nordström-metriken angående detta område och händelsehorisonterna. Det finns dock ett till område av intresse.

Betraktar vi de tidslika geodeterna utanför den yttre händelsehorisonten finner vi att ljuskonerna där är lutade så att värslinjerna måste följa rotationsriktningen för kroppen, alltså φ blir tidslika riktningen. Detta är ganska intressant. Det finns emellertid inget som hejdar en resenär från att färdas fritt i radiell riktning också, så länge hon följer med rotationsriktningen. Denna region kallas för *ergosfären*. Se figur 22 för en skiss över ergosfären.



Figur 22: Skiss över ergosfären. r_+ och r_- är den yttre respektive inre händelsehorisonten. Den sned-streckade regionen runt om är ergosfären.

Nu åter till $\rho = 0$. Låt oss också betrakta $r = 0$. Om vi faktiskt räknar på det ser vi att den sanna singulariteten, den vi får från Riemann-Christoffel-tensorn, inte är vid $r = 0$ utan vid $\rho = 0$. Eftersom vi har $\rho^2 = r^2 + J^2 \cos^2(\theta)$ och varken r^2 eller $J^2 \cos^2(\theta)$ ska kunna vara negativ har vi att den bara försvinner då båda är 0.

$$(193) \quad \begin{aligned} r &= 0 \\ \theta &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Vi ska här inse att $r = 0$ inte är en punkt utan en mängd av punkter i M . Förut kunde vi betrakta $r = 0$ som en tidslig kurva. Här är $r = 0$ en skiva av världslinjer. Rotationen har alltså smetat ut singulariteten till en ring som utgör randen av den skivan. En analytisk fortsättning av metriken berättar

att en ny rumtid finns på andra sidan den ringen. Nu börjar vi närma oss sånt som kanske inte är så lätt att ta till sig längre. Denna nya rumtid representeras alltså av $r < 0$, vilket rent matematiskt, går att tillåta.

Ett sista ord om ergosfären. Roger Penrose föreslog att man skulle kunna använda den för att extrahera energi ur ett svart hål. Det går inte. För förklaring av detta, se exempelvis [Car97].

För mycket mer information om svarta hål, se exempelvis [Wal84], [Mis73] eller [Wei72].

12 Lektion: satellitnavigation, Merkurius precession och gravitationella linser

Vi ska nu undersöka Schwarzschild-metriken vidare. I synnerhet kommer vi fundera över vad för effekter gravitation har på satellitnavigation och geodeter, både för massiva kroppar så som planeter och för ljus. Det visar sig att omloppsbanor precesserar och att ljus böjs runt kroppar så att de blir som fokuserande linser.

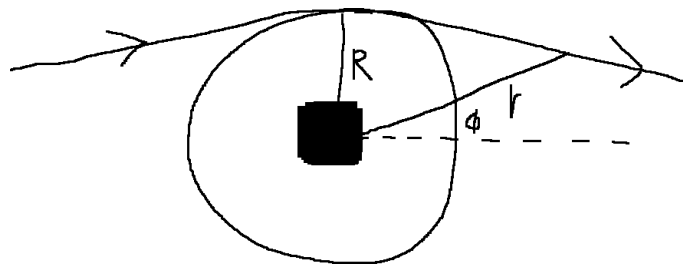
12.0 Satellitnavigation

Vi börjar med att skriva om Schwarzschild-metriken på vad som kallas för *isotropisk form*.

$$(194) \quad ds^2 = \frac{\left(1 - \frac{m}{2\rho}\right)^2}{\left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^2} dt^2 - \left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Där vi infört $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Låt en ljusignal passera kroppen på ett avstånd, R . Se figur 23 för en skiss över situationen. Då kan vi, med ett val av koordinater, till en första approximation beskriva banan som, säg, $z = 0, y = R, \rho = \sqrt{R^2 + x^2}$. Om vi nu ignorerar termer av ordning $\frac{m^2}{\rho^2}$ så får vi för en ljuslik kurva, $ds = 0$

$$(195) \quad \begin{aligned} dt &\approx \pm \left(1 + \frac{2m}{\rho}\right) dx \\ &= \pm \left(1 + \frac{2m}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right) dx \end{aligned}$$



Figur 23: En tidslik bana faller in mot en kropp, är som närmst på avståndet $r = R$ och fortsätter sedan på andra sidan. Utritad är även koordinatvärdena för r och φ för en punkt längs banan.

Integrerar vi detta från $x = 0$ till $x = X$ så får vi koordinattiden, Δt , det tar för ljuset att propagera från den punkt på kurvan som är närmst kroppen till någon annan punkt. Vi får efter småjobbiga integraler

$$\begin{aligned}
(196) \quad \Delta t &\approx X + 2m \ln \left(\frac{X + \sqrt{R^2 + X^2}}{R} \right) \\
&\approx X + 2m \ln \left(\frac{2X}{R} \right)
\end{aligned}$$

Med antagandet $\frac{R^2}{X^2} \ll 1$ i sista steget.

Om vi nu tänker att signalen skickas från X_1 på ena sidan kroppen till X_2 på andra sidan så blir tidsskillnaden

$$(197) \quad \Delta t_{1 \rightarrow 2} \approx X_1 + X_2 + 2m \ln \left(\frac{4X_1 X_2}{R} \right)$$

Den logaritmiska termen är den som läggs till av gravitationseffekter. I platt rumtid hade vi bara haft de två konstanterna. Effekten kallas för *Shapiro-fördröjning*.

I praktiken kan vi använda den för kommunikation med satelliter. Utan att ta hänsyn till denna fördröjning i jordens gravitationsfält blir det litet fel.

12.1 Tidslika geodeter i Schwarzschild-metriken

För att diskutera Merkurius precession behöver vi fundera över hur tidslika världslinjer ser ut i Schwarzschild-metriken.

I Newtons teori är alla banor kägelsnitt. De är alltså antingen parabler (tänk objekt som kastas från jorden och landar i den), hyperbler (tänk objekt som kastas mot jorden från månen men missar jorden och fortsätter bort) eller ellipser (tänk något som fastnat i omloppsbana). I Einsteins teori kan banorna vara mer spiralformade.

Alla omloppsbanor måste vara planära, det går inte att bryta den symmetrin i Schwarzschild-metriken, så vi sätter härnäst $\theta = \frac{\pi}{2}$, och betraktar geodeter i det ekvatoriella planet.

Vi inför $\alpha = 1 - \frac{2m}{r}$, och skriver vår metrik som

$$(198) \quad ds^2 = \alpha dt^2 - \frac{1}{\alpha} dr^2 - r d\varphi^2$$

Vi kan sätta detta i den geodetiska ekvationen för att få lagrangianen

$$\begin{aligned}
(199) \quad \mathcal{L} &= \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}} \\
&= \alpha \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \\
&= \alpha t^2 - \frac{1}{\alpha} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2
\end{aligned}$$

Där $\dot{\beta} = \frac{d\beta}{ds}$. Denna lagrangian är oberoende av t och φ , vilket innebär att banorna inte ändras med tiden, metriken är statisk och att banorna ser likadana ut oberoende av rotation. Vi räknar ut Euler-Lagranges ekvationer för lagrangianen och får följande två ekvationer

$$\begin{aligned}
(200) \quad \alpha \dot{t} &= k \\
r^2 \dot{\varphi} &= h
\end{aligned}$$

Med k och h konstanter. Dessa rörelsekonstanter motsvarar de klassiska bevarade storheterna *energi* och *rörelsemängdsmoment*. Fortsätter vi får vi en aningen krångligare

$$(201) \quad \frac{\frac{1}{\alpha} 2\dot{r}}{ds} - \left[\frac{2m}{r^2} t^2 - \left(\partial_r \frac{1}{\alpha} \right) \dot{r}^2 - 2r \dot{\varphi}^2 \right] = 0$$

Från dessa kan vi få de cirkulära banorna, alltså de med r konstant. Med $\dot{r} = 0$ får vi från dessa tre ekvationer relationen

$$(202) \quad \omega^2 = \frac{m}{r^3}$$

Där ω är vinkelhastigheten, $\frac{d\varphi}{dt}$. Detta är inget annat än Keplers tredje lag. En sak vi bör notera är att vi får

$$(203) \quad ds^2 = \left(1 - \frac{3m}{r} \right) dt^2$$

Vilket betyder att massiva partiklar har $r > 3m$, där vi minns att $r = 2m$ är Schwarzschild-radien. $r = 3m$ motsvarar $ds^2 = 0$ vilket är radien för ljuslika cirkulära banor. Ljus kan alltså fastna i omloppsbana kring svarta hål i en cirkulär bana med radie $r = 3m$.

Åter till tidslika världslinjer. Vi använder ekvationerna ovan som relaterar till rörelsekonstanter för att få

$$(204) \quad \begin{aligned} \dot{r}^2 &= k^2 - \frac{1}{r^3}(r - 2m)(r^2 + h^2) \\ &= k^2 - V(r) \end{aligned}$$

Där vi definierat en potential, V , som bara beror av radiella koordinaten. Vi kan derivera uttrycket med avseende på s och få något som liknar en Newtons andra lag

$$(205) \quad 2\ddot{r} = -\frac{dv}{dr}$$

Där vi använt $\frac{dV}{ds} = \frac{dV}{dr} \frac{dr}{ds}$ för att få bort alla $\dot{r}$ -termer i högerledet. En bana bestäms alltså av rörelsekonstanterna, k och h . En grej vi kan notera för det radiella beteendet är att givet tillräcklig stor energi, k , så finns det bundna banor som spiralerar från $r < 2m$, alltså innanför händelsehorisonten, till $r > 2m$, för att sedan spirallera in i gen.

För det klassiska fallet får vi på motsvarande sätt

$$(206) \quad \begin{aligned} \dot{r}^2 &= 2E - \frac{1}{r^2}(h^2 - 2mr) \\ &= 2E - V_N(r) \end{aligned}$$

Där V_N är den motsvarande Newtonska potentialen.

Låt oss nu betrakta vinkelns, snarare än det radiella beteendet.

Cirkulära banor fås då vi alltid befinner oss i potentialminimum. Vi ser att minimum för potentialens radiella derivata fås vid

$$(207) \quad r = \frac{h^2 \pm \sqrt{h^4 - 12m^2h^2}}{2m}$$

Detta har ingen lösning för $h < 2m\sqrt{3}$. I sådana fall finns inga omloppsbanor utan allt faller in i kroppen. Vi ska försöka undersöka de stabila banorna nu, de som i det klassiska fallet är elliptiska, med cirkeln som ett specialfall.

12.2 Mercurius precession

Vi är här intresserade av formen av banorna endast. Det visar sig att det är praktiskt att införa den reciproka radien som en koordinat

$$(208) \quad u = \frac{1}{r}$$

Om vi nu överför vår ekvation för det radiella beteendet i en klassisk potential, ekvation 206, till den nya koordinaten får vi

$$(209) \quad \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = \frac{2mu}{h^2} + \frac{2E}{h^2}$$

Vi använder här ett litet trick för att integrera diffekvationen. Först deriverar vi den för att få bort kvadratiska derivatan. Vi gör det och får bort en faktor $2\frac{du}{d\varphi}$, vilket ger oss en lättare linjär diffekvation av andra ordningen

$$(210) \quad \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{m}{h^2}$$

Den löser vi och får något på formen

$$(211) \quad u = \frac{m}{h^2}(1 + e \cos(\varphi))$$

där e är eccentriciteten för ett kägelsnitt ($e < 1$ för elliptiska banor).

Låt oss applicera samma metod på relativistiska fallet, ekvation 204. Vi leds omedelbart till

$$(212) \quad \frac{d^2u}{d\varphi} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2$$

Den sista termen är vad som leder till alla möjliga relativistiska banor utöver de möjliga klassiska. I analysen av planeters banor däremot så är den bara en liten korrektion. Låt os se hur liten den är genom att jämföra termerna i högerledet. Kvoten

$$(213) \quad \frac{3mu^2}{\left(\frac{m}{h}\right)}$$

För ett praktiskt fall, sätt v hastigheten och $h \approx rv$. Då får vi kvoten

$$(214) \quad \frac{\frac{3}{r^2}}{\frac{1}{r^2 v^2}} = 3v^2$$

Vi kan sätta in den kvickaste av våra planeter, Merkurius, här. Dess hastighet är ungefär 10^{-7} .

Eftersom denna term blir så liten så kan vi sätta in det Newtonska värdet för u i vår diffekvation, som då blir

$$(215) \quad \frac{d^2 u}{d\varphi} + u = \frac{3m}{h^4} (1 + 2e \cos(\varphi) + e^2 \cos^2(\varphi))$$

Vi får lösa den här med flera partikulärlösningar i taget, annars blir det för svårt. Det blir alltså lösningar till tre olika diffekvationer på formerna

$$(216) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\varphi} + u &= A \\ \frac{d^2 u}{d\varphi} + u &= A \cos(\varphi) \\ \frac{d^2 u}{d\varphi} + u &= A \cos^2(\varphi) \end{aligned}$$

Där i vårt fall A är en konstant av storleksordningen $\frac{m^3}{h^4}$. Dessa tre diffekvationer har lösningar

$$(217) \quad \begin{aligned} u &= A \\ u &= \frac{1}{2} A \varphi \sin(\varphi) \\ u &= \frac{1}{2} A - \frac{1}{6} A \cos(2\varphi) \end{aligned}$$

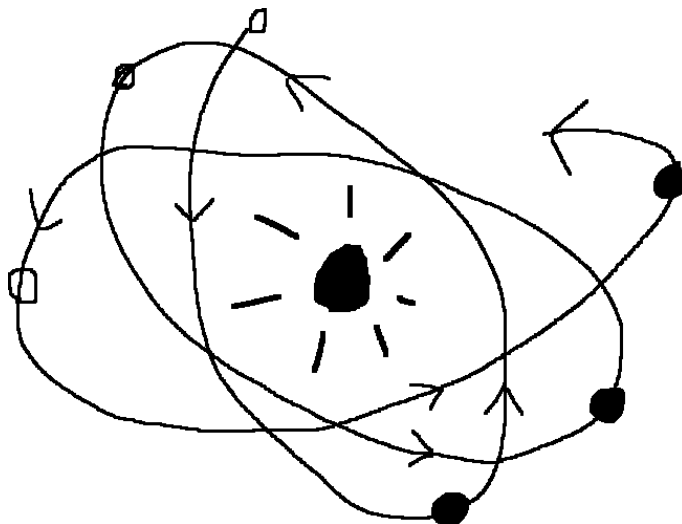
Den första ger ett ointressant konstant bidrag. Den tredje ger en periodisk störning med dubbel frekvens (period π) jämfört med det klassiska fallet men denna ger ingen störning över tid utan jämnar ut sig. Den andra däremot har inte en period på 2π och det är den störningen som vi över tid kan observera. Vi tar alltså som en ungefärlig lösning

$$(218) \quad \begin{aligned} u &= \frac{m}{h^2} \left[1 + e \cos(\varphi) + \frac{3m^2}{h^2} e \varphi \sin(\varphi) \right] \\ &\approx \frac{m}{h^2} \left[1 + e \cos(\varphi) \left(1 - \frac{3m^2}{h^2} \right) \varphi \right] \end{aligned}$$

Där vi använt $\cos(\varphi - \beta) = \cos(\varphi)\cos(\beta) + \sin(\varphi)\sin(\beta)$ och småvinkel-approximationerna $\cos(\beta) \approx 1$, $\sin(\beta) \approx \beta$, för liten vinkel $\beta = \frac{3m^2\varphi}{h^2}$. Vi kan jämföra denna ekvations period med det Newtonska fallet (2π)

$$(219) \quad \frac{2\pi}{1 - \frac{3m^2}{h^2}} > 2\pi$$

Det innebär alltså att om vi låter en sådan planet snurra runt så kommer ändpunkterna av ellipsen hamna litet längre fram för varje varv. Detta kallas för *precession*. Se figur 24 för en skiss över situationen.



Figur 24: Skiss över en planets bana kring solen. Utmarkerat längs banan är riktning, perihelia (tomma cirklar) och aphelia (ifyllda cirklar). Precessionen är kraftfullt överdriven. Vi noterar att cirkklarna flyttar sig längre och längre fram i rotationens riktning.

Räknar vi på Merkurius bana med detta så får vi en precession på 42.98 bågsekunder per sekel. Mätvärdena ligger runt 42.98 ± 0.04 . Detta var ett av de första testerna man gjorde för att bedöma den allmänna relativitetens plats bland fysikaliska teorier.

12.3 Gravitationella linser

Om vi nu funderar över ljuslika banor i stället. Hur går ljus förbi en kropp? Vi vet att ljus följer geodeter med $ds^2 = 0$. Vi har alltså i stället differentialekvationen

$$(220) \quad \frac{d^2}{d\varphi^2} + u = 3mu^2$$

Den här är svår så vi försöker en iterativ lösning. Vi utnyttjar att högerledet är pyttelitet i jämförelse med u . Utan högerledet hade lösningen varit på formen

$$(221) \quad u = \frac{\sin(\varphi)}{R}$$

För någon konstant, R , som motsvarar hur nära kroppen banan går. Sätt in detta i differentialekvationens högerled

$$(222) \quad \frac{d^2}{d\varphi^2} + u = \frac{3m}{R^2}(1 - \cos^2(\varphi))$$

En partikulärlösning till denna är

$$(223) \quad u = \frac{3m}{2R^2} \left[1 + \frac{1}{3} \cos(2\varphi) \right]$$

Lägg detta till homogenlösningen, ekvation 221. Då får vi den andra iterationen

$$(224) \quad u = \frac{\sin(\varphi)}{R} + \frac{3m}{2R^2} \left[1 + \frac{1}{3} \cos(2\varphi) \right]$$

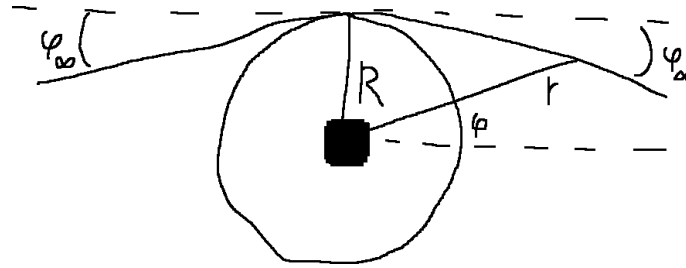
För stora r måste vänsterledet, $u = \frac{1}{r}$ gå mot 0 och därför måste φ vara mycket litet. Då kan vi göra småvinkelapproximationen $\sin(\varphi) \approx \varphi$ och $\cos(2\varphi) \approx 1$. I gränsen $u \rightarrow 0$ så får vi $\varphi \rightarrow \varphi_\infty$

$$(225) \quad \varphi_\infty = -\frac{2m}{R}$$

Vi har alltså räknat ut ett beteende för hur ljus böjs då det passerar en kropp. Kan vi använda detta till något?

Till att börja med kan vi vid en solförmörkelse mäta stjärnljusets böjning kring solen för att testa den allmänna relativitetsteorin. Många sådana experiment har gjorts, inte minst 1919 e.Kr. då Eddingtons expedition orsakade stor uppståndelse inom naturfilosofiska kretsar.

Vi ser att ljuset, om vi tar hänsyn till krökningen på båda sidor om kroppen (se figur 25 för en skiss över situationen), blir vinkelavvikelsen för ljus som kommer från fjärran och fortsätter långt efter att ha passerat kroppen



Figur 25: Skiss över ljusets böjning då det passerar en kropp på avståndet R . På stort avstånd blir den deflekterade vinkeln φ_∞ på varje sida.

$$(226) \quad \Phi = \frac{4m}{R}$$

Kroppar kan alltså användas för att konvergera ljus, precis som en konvex lins. Vi föreställer oss att en lampa lyser och mellan oss och lampan finns en tung kropp i vägen. Då skall alltså ljuset kröka sig runt kroppen och vi skall se en ljus ring runt kroppen. Detta kallas en *Einstein-ring*. Detta kräver alltså att lampan är långt borta från kroppen, som är långt borta från oss. Om vi låter avståndet mellan lampan och kroppen vara oändligt måste vi vara på minst avståndet

$$(227) \quad D = \frac{R}{\Phi} = \frac{R^2}{4m}$$

Man skulle även kunna tänka sig att ljus går två olika vägar från en källa till en observatör. Exempelvis en "rak" väg (efterblivet uttryck eftersom båda vägarna måste vara raka men vad som åsyftas är den ungefärliga vägen som varit den unika raka i avsaknad av tung kropp) och en väg som böjs kring en tung kropp. Observatören skulle då se två bilder av källan. Se figur 26 för en skiss över en sådan situation.



Figur 26: Skiss över en situation där en observatör skådar en stjärna men ser två bilder. En bild är ljus från den "direkta" vägen, och den andra är ljus från en väg som deflekterats av en tung kropp. Observatören ser alltså en stjärna på varje sida om den tunga kroppen, fast det är samma stjärna som ger upphov till båda bilderna.

13 Lektion: gravitationella vågor

Jag står fast vid ställningen att "allt är vågor".

Erwin Schrödinger

Nu ska vi studera hur små störningar i en annars platt metrik resulterar i en vibrerande rumtid. Det visar sig att störningarna breder ut sig som vågor.

13.0 Vågekvationen

Vi minns från våra studier i partiella differentialekvationer en operator på formen $\partial_\mu \partial^\mu$ som ibland kallas för *d'Alembert-operatorn*[†]. Vi säger att en funktion, ψ , uppfyller *vågekvationen* om

$$(228) \quad \partial_\mu \partial^\mu \psi = 0$$

Läsare som är mer vana vid PDE kanske vill skriva $\psi_{tt} - \sum_{j=1}^{\dim(M)} \psi_{jj} = 0$ (med indices som indikerar partialderivator), men det är både fult och jobbigt.

Vågekvationen beskriver en hel del i fysiken. Vattenytan, strängarna på en violin, ljud, trumskinn, elektroners rörelse, ljus och kanske även gravitation. Om vi tänker oss en stilla sjö och vi kastar en sten i sjön så kommer störningen ge upphov till vågor. Vattenytan kommer att följa vågekvationen och om energin är bevarad i sjön (det är den inte i praktiken) så kommer vågorna aldrig stanna, utan för evigt lyda vågekvationen.

Vi kan även sätta dit en källterm, och på så sätt skilja mellan den *homogena vågekvationen* ovan och den *inhomogena vågekvationen*

$$(229) \quad \partial_\mu \partial^\mu \psi = j$$

Där j är en källterm. Man skulle i vår sjö-analogi kunna tänka sig j som en kran som evigt droppar ned i sjön (där den ökade volymen och massan från dropparna evigt försummas såklart).

Vi ska nu undersöka om det går att få metriken att uppfylla något slags vågekvation. För att göra det lätt för oss undersöker vi detta i en nästan platt rumtid.

13.1 Linjär approximation för rumtiden

Vi föreställer oss en nästan platt rumtid, där

[†]Ibland betecknas $\partial_\mu \partial^\mu$ med $\square$ eller ∂^2 . Vi använder inte dessa.

$$(230) \quad \begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \\ h_{\mu\nu} &\ll 1 \end{aligned}$$

Med $h_{\mu\nu}$ en liten störning som vi i andra ordningen ignorerar. Likaså derivatorna av den,

$$(231) \quad \partial_\alpha h_{\mu\nu} \ll 1$$

Vårt mål är nu att skriva om fältekvationerna för denna nästan platta rumtid. För det behöver vi den inversa metriken, förbindelsekoefficienterna, Riemann-Christoffel-tensorn, Ricci-tensorn och Ricci-skalären.

Inversa metriken får vi enkelt från att $g_{\alpha\nu}g^{\alpha\mu} = \delta_\nu^\mu$. Ignorera andra ordningen i $h_{\mu\nu}$ så får vi inversa metriken

$$(232) \quad g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$$

Eftersom vi ignorerar andra ordningen så är

$$(233) \quad \begin{aligned} h^{\mu\nu} &= h_{\alpha\beta}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} \\ &= h_{\alpha\beta}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} \end{aligned}$$

Då var det förbindelsekoefficienternas tur. Låt oss gå till deras definition i termer av metriken. Vi ingorerar andra ordningen i både $h_{\mu\nu}$ och dess derivata, och inser att η -delen av metriken är konstant och därför saknar derivata. Då får vi

$$(234) \quad \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}(\partial_\nu h_{\mu\alpha} + \partial_\mu h_{\alpha\nu} - \partial_\alpha h_{\mu\nu})$$

Näst på tur är Riemann-Christoffel-tensorn. Vi noterar att termerna med $\Gamma\Gamma$ blir andra ordningen i derivatan av $h_{\mu\nu}$. Så kvar blir

$$(235) \quad B^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma}$$

Vi kan stoppa in detta i våra uttryck för $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ och förstå att partialderivatan inte kommer ge någon verkan på $\eta_{\mu\nu}$ eftersom den är konstant. Vi får då

$$(236) \quad B^\rho_{\sigma\mu\nu} = -\frac{1}{2}\eta^{\rho\alpha}(\partial_\mu\partial_\sigma h_{\alpha\nu} + \partial_\mu\partial_\nu h_{\alpha\sigma} - \partial_\mu\partial_\alpha h_{\nu\sigma} - \partial_\nu\partial_\sigma h_{\alpha\mu} - \partial_\nu\partial_\mu h_{\alpha\sigma} + \partial_\nu\partial_\alpha h_{\mu\sigma})$$

Vi vet att partialderivator kommuterar och metriken är symmetrisk så det reducerar ned till

$$(237) \quad B^\rho_{\sigma\mu\nu} = -\frac{1}{2}\eta^{\rho\alpha}(\partial_\mu\partial_\sigma h_{\alpha\nu} - \partial_\mu\partial_\alpha h_{\nu\sigma} - \partial_\nu\partial_\sigma h_{\alpha\mu} + \partial_\nu\partial_\alpha h_{\mu\sigma})$$

Det får bli vårt uttryck för Riemann-Christoffel-tensorn.

Nu drar vi ihop den, $B^\rho_{\sigma\rho\nu} = R_{\sigma\nu}$, och får Ricci-tensorn. Vi ignorerar högre ordningen i störningen och får

$$(238) \quad \begin{aligned} R_{\sigma\nu} &= -\frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}(\partial_\mu\partial_\sigma h_{\alpha\nu} - \partial_\mu\partial_\alpha h_{\nu\sigma} - \partial_\nu\partial_\sigma h_{\alpha\mu} + \partial_\nu\partial_\alpha h_{\mu\sigma}) \\ &= -\frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\sigma h^\mu_\nu - \partial_\mu\partial^\mu h_{\nu\sigma} - \partial_\nu\partial_\sigma h^\mu_\mu + \partial_\nu\partial_\alpha h^\alpha_\sigma) \end{aligned}$$

Vi ser att vi fått en d'Alembert-operator, det ser ju lovande ut. Vi passar även på att definiera $g^{\mu\nu}h_{\mu\nu} = h^\mu_\mu = h$. Vi skriver om som

$$(239) \quad R_{\sigma\nu} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\sigma h^\mu_\nu + \partial_\nu\partial_\alpha h^\alpha_\sigma - \partial_\mu\partial^\mu h_{\nu\sigma} - \partial_\nu\partial_\sigma h)$$

Då tar vi slutligen Ricci-skalären. Återigen ignorerar vi högre ordningens termer och får

$$(240) \quad \begin{aligned} R &= -\frac{1}{2}\eta^{\sigma\nu}(\partial_\mu\partial_\sigma h^\mu_\nu + \partial_\nu\partial_\alpha h^\alpha_\sigma - \partial_\mu\partial^\mu h_{\nu\sigma} - \partial_\nu\partial_\sigma h) \\ &= -\frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\sigma h^{\mu\sigma} + \partial_\mu\partial_\sigma h^{\mu\sigma} - \partial_\mu\partial^\mu h^\sigma_\sigma - \partial_\nu\partial^\nu h) \\ &= \partial_\mu\partial_\sigma h^{\mu\sigma} - \partial_\mu\partial^\mu h \end{aligned}$$

Från dessa byggstenar kan vi uttrycka Einstein-tensorn

$$(241) \quad \begin{aligned} G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \\ &= \frac{1}{2}(\partial^\alpha\partial_\mu h_{\alpha\nu} + \partial^\alpha\partial_\nu h_{\mu\alpha} - \partial_\alpha\partial^\alpha h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu h - \eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta h_{\alpha\beta} + \eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial_\alpha h) \end{aligned}$$

Vi inför $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$. Ersätt $h_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}h$ i uttrycket så får vi

$$(242) \quad G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial^\alpha \partial_\mu \bar{h}_{\alpha\nu} + \partial^\alpha \partial_\nu \bar{h}_{\mu\alpha} - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \bar{h}_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \partial^\alpha \bar{h}_{\mu\nu})$$

Resultatet blir alltså en liknande ekvation men med en term mindre. Nu är vi redo för att studera gravitationella vågor.

13.2 Gravitationella vågor

Vad vi nu lärt oss om nästan platt rumtid vill vi föra över på en platt rumtid med en liten störning. Vi vill i synnerhet studera hur den störningen beter sig.

Vi kommer här att utnyttja ett koordinatbyte, som givetvis inte förändrar fysiken, men som gör det vi skall studera mer uppenbart. Koordinaterna vi byter till kallas för *Lorenz-stickfastheten*. Den kännetecknas av att alla termer i Einstein-tensorn blir 0 utom den sista. Vi får

$$(243) \quad \begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (\partial^\alpha \partial_\mu \bar{h}_{\alpha\nu} + \partial^\alpha \partial_\nu \bar{h}_{\mu\alpha} - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \bar{h}_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \partial^\alpha \bar{h}_{\mu\nu}) \\ &\rightarrow -\frac{1}{2} \partial_\alpha \partial^\alpha \bar{h}_{\mu\nu} \end{aligned}$$

För tomrum har vi $T_{\mu\nu} = 0$, och det innebär att $G_{\mu\nu} = 0$, så i de här koordinaterna blir det tydligt (de finns såklart i alla koordinatsystem) att metriken störning uppfyller

$$(244) \quad \partial_\alpha \partial^\alpha \bar{h}_{\mu\nu} = 0$$

Vilket är vågekvationen för en våg som utbreder sig med hastigheten 1 som alltså är ljusets hastighet.

13.3 Polarisering av gravitationella vågor

Metriken störning, $h_{\mu\nu}$ har 16 komponenter. Hur många frihetsgrader har den?

Eftersom vi vet att den är symmetrisk, $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$ så sjunker det $16 \rightarrow 10$. Vi ska nu byta koordinater åter, så att det framgår att den faktiskt bara har 2 frihetsgrader, som motsvarar dess polarisationsmoder.

Lorenz-stickfastheten, $\partial^\alpha h_{\mu\alpha} = 0$, är fyra villkor, som ytterligare reducerar frihetsgraden $10 \rightarrow 6$.

Lorenz-stickfastheten definierar en 4-parameter-familj av koordinatsystem som är relaterade till varandra genom translation. Att låsa denna translation ger

fyra villkor, som ytterligare reducerar frihetsgraden $6 \rightarrow 2$. Det specialfall av Lorenz-stickfastheten som vi väljer för att göra polarisationsmoderna uppenbara kallas för den *transversella spårlösa stickfastheten*. Det valet beskrivs med en observatör som rör sig med hastigheten U^μ , och vi låser den så att $h_{\mu\nu}U^\mu = 0$ och skalar den så att $h = h^\mu_\mu = 0$. Då har vi även att $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$, så härnåfter kan vi återgå till $h_{\mu\nu}$.

Vi roterar vårt koordinatsystem så att $U^\mu = \partial_0$, alltså riktad helt i tidslika koordinatriktningen med storlek 1 (ljusets hastighet), och vågen propagerar helt i 3-riktningen.

Vi har då att $h_{\mu 0} = 0$ från det transversella spårlösa villkoret. Vidare har vi $\partial_0 h_{0\mu} + \partial_3 h_{3\mu} = 0$, men eftersom den första termen är 0 redan, så har vi $\partial_3 h_{3\mu} = 0$. Vi kan nu använda våra kunskaper om vågfunktioner för att använda dessa villkor.

Vi vet att en lösning till vågekvationen kan skrivas som

$$(245) \quad h_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma}$$

Då ser vi att derivatorna bara ger konstanter multiplicerade med vågfunktionen själv. Ett uttryck som $\partial_\alpha h_{\mu\nu} = 0$ innebär då att $k \cdot h_{\mu\nu} = 0$, för någon konstant, k , och därmed $h_{\mu\nu} = 0$.

Med dessa villkor har vi bara fyra termer kvar som kan vara nollskilda i den här stickfastheten, $h_{11}, h_{12}, h_{21}, h_{22}$. Detta ger oss två frihetsgrader ty vi har villkoren (från symmetri respektive spårlöshet)

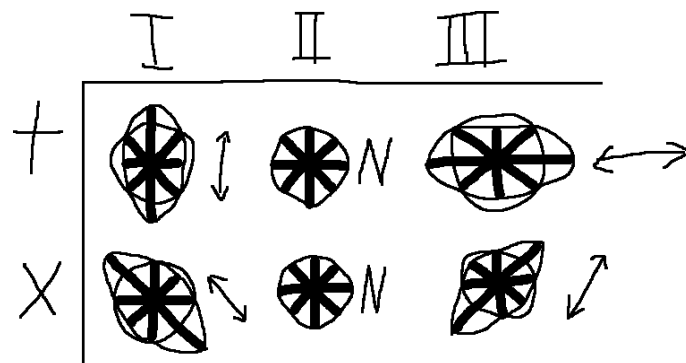
$$(246) \quad \begin{aligned} h_{12} - h_{21} &= 0 \\ h_{11} + h_{22} &= 0 \end{aligned}$$

Vi har nu visat att vi med en godtycklig liten störning i en platt rumtid uppfyller en vågekvation med två frihetsgrader. Dessa kallas för vågens *polarisation*. Vi kan alltså skriva störningen som en summa av två termer. Den ena har $h_{11} = -h_{22} \neq 0$, och vi kallar den för $+$ -polarisation. Den andra har $h_{12} = h_{21} \neq 0$, och vi kallar den för x -polarisation.

$+$ -polariserade vågor kan vi betrakta som att rumtiden drar ihop sig och sen utvidgar sig längs två axlar, som formar ett $+$ -tecken. De gör det harmoniskt, sinusoida svängningar, fasförskjutet en halv period mellan axlarna.

På samma sätt är x -polarisationen för ett par axlar som är vridna från $+$ med ett kvarts varv. Se figur 27 för en skiss över en halv period av denna situation.

Vi kan notera att detta fält är ett med spinn 2. Det kan vi avgöra från polarisationens egenvärden, eller, ekvivalent, genom att fundera över symmetrin. Hur mycket måste vi vrida $+$ och x för att de ska återvända till $+$ och x ? Vi



Figur 27: Ett åttaekrigt hjul med ekrarna i linje med koordinataxlarna och diagonalerna. För varje situation är en cirkel ritad som motsvarar det oförändrade hjulets form tillsammans med en ellips som visar det förändrade hjulets form. Tre punkter längs en halv period är ritade. Vid *I* är effekten av $+$ -polarisationen utdragande i vertikal riktning. Hjulets ekrar i denna riktning är längre, och de vinkelräta, horisontella, är sammandragna i stället. De diagonala ekrarna påverkas inte. Vid *II*, alltså en kvarts period efter *I*, är effekten i det neutrala läget så hjulets form sammanfaller med det oförändrade hjulets. Vid *III* är vi en halv period efter *I*. Effekten är omvänd, nu är de horisontella ekrarna utdragna och de vertikala sammandragna. De diagonala påverkas fortfarande inte av $+$ -polarisationen. Hjulen undertill är ritade i motsvarande situation för x -polarisation. Här påverkas inte de vertikala och horisontella ekrarna.

ser ju att gravitationen sträcker eller drar ihop rumtiden längs hela axeln, så om vi bara vrider ett halvt varv så är vi tillbaka. Jämför det med fermioner (Dirac-fältet har spinn $\frac{1}{2}$) som vi måste vrida två varv för att komma tillbaka med.

13.4 Geodeter i gravitationella vågor

För att undersöka hur materia påverkas av gravitationella vågor kan vi betrakta två intill-liggande geodeter och undersöka hur avståndet mellan dem förändras som en effekt av gravitationella vågor.

Den geodetiska ekvationen har vi redan sett

$$(247) \quad \frac{dv^\sigma}{d\tau} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = 0$$

Det är krångligt att räkna ut förbindelsekoefficienter så vi begränsar oss till ett specialfall, $v = \partial_0$, alltså en partikel vars hastighet är rakt framåt i tiden. Då får vi

$$(248) \quad \frac{dv^\sigma}{d\tau} + \Gamma^\sigma_{00} = 0$$

Om vi går till definitionen av förbindelsekoefficienten ser vi att den beror av komponenter av $h_{\mu\nu}$ som i vårt val av stickfasthet är 0. Vi får alltså

$$(249) \quad \frac{dv^\sigma}{d\tau} = 0$$

Vi kan integrera det för att få en koordinatrepresentation av geodeten, den blir $x^\mu = b^\mu + \delta_0^\mu \tau$. Alltså konstant i rummet och avancerat med τ från en tidspunkt.

Nu betraktar vi en intill-liggande världslinje och räknar ut avståndet mellan dem för att se hur det påverkas av gravitationella vågor.

Ta en till parallell geodet förskjutet i $x - y$ -planet (eftersom vår gravitationella våg går i z -riktningen så får vi ingen mer relevant information av att betrakta skillnad i z -led). Vi vill nu ha ett uttryck för avståndet mellan dem, givet en kurva mellan två punkter där världslinjerna skär hyperplanet för en konstant tidskoordinat. Vi vill rita en sådan kurva och finna längden av den. Säg att geodeternas koordinatskillnad i planet är Δx^1 och Δx^2 . Då kan vi skriva en kurva mellan dem som $x^1 = b^1 + \Delta x^1 \lambda$ och $x^2 = b^2 + \Delta x^2 \lambda$, för parametern $\lambda \in (0, 1)$. Vi räknar ut längden av den

$$(250) \quad S = \int_0^1 d\lambda \sqrt{g_{11}(\Delta x^1)^2 + 2 \cdot g_{12} \Delta x^1 \Delta x^2 + g_{22}(\Delta x^2)^2} \\ = g_{11}(\Delta x^1)^2 + 2 \cdot g_{12} \Delta x^1 \Delta x^2 + g_{22}(\Delta x^2)^2$$

Låt oss skriva ut metriken i termer av vår störning.

$$(251) \quad (\eta_{11} + h_{11})(\Delta x^1)^2 + 2 \cdot (\eta_{12} + h_{12}) \Delta x^1 \Delta x^2 + (\eta_{22} + h_{22})(\Delta x^2)^2 = \\ = (\Delta x^1)^2(-1 + h_{11}) + 2 \cdot \Delta x^1 \Delta x^2 h_{12} + (\Delta x^2)^2(-1 - h_{22})$$

Vi kan nu gruppera dessa i de konstanta termerna och störningstermerna, där vi infört $h_{12} = h_{21} = h_x$ och $h_{11} = -h_{22} = h_+$

$$(252) \quad - [(\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2] + \\ + [h_+(\Delta x^1)^2 + h_x \Delta x^1 \Delta x^2 - h_+(\Delta x^2)^2] \\ = [(\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2] + [(h_+(\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2) + h_x \Delta x^1 \Delta x^2]$$

Vi ser alltså att avståndet i mellan världslinjerna i ett hyperplan med konstant tidskoordinat kommer att variera med störningens oscillationer.

Låt oss nu koncentrera oss på den varierande delen som vi kallar för Δ .

$$(253) \quad \Delta = [(h_+(\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2) + h_x \Delta x^1 \Delta x^2]$$

Om vi tänker oss att vår förskjutning helt är i x^1 -riktningen så har vi att Δ blir

$$(254) \quad \Delta_{x^1} = [h_+(\Delta x^1)^2]$$

Detta kommer vara ett avstånd som följer en sinusoid oscillation som bara beror av $+$ -polarisationen. Gör samma för x^2 -riktningen

$$(255) \quad \Delta_{x^2} = [-h_+(\Delta x^2)^2]$$

Vi får samma resultat fast förskjutet med en halv period ($-1 = e^{i\pi}$). Det är ju precis vad vi förväntade oss.

Slutligen betrakta en kombination av riktningarna som blir diagonal, $\Delta x^1 = \Delta x^2$, då får vi

$$(256) \quad \begin{aligned} \Delta_{x^1+x^2} &= [(h_+(\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2) + h_x \Delta x^1 \Delta x^2] \\ &= [h_x \Delta x^1 \Delta x^2] \end{aligned}$$

Precis som vi tänkt oss så kommer denna längd bara att förskjutas beroende av h_x . Tag nu slutligen och vänd på diagonalen så att $\Delta x^1 = -\Delta x^2$, då får vi

$$(257) \quad \begin{aligned} \Delta_{x^1-x^2} &= [(h_+(\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2) + h_x - \Delta x^1 \Delta x^2] \\ &= [h_x - \Delta x^1 \Delta x^2] \end{aligned}$$

Detta är samma som förut men förskjuten en halv period.

För en godtycklig riktning så kommer den att variera med en linjärkombination av dessa två polarisationer.

h_+ lämnar alltså diagonalen oförändrad och h_x lämnar korset oförändrat. Det här är effekten som användes för att detektera gravitationella vågor vid LIGO- och Virgo-experimenten 2016 e.Kr.

För en mycket fin genomgång av gravitationella vågor med trevliga illustrationer, se bland annat [Rin01].

14 Lektion: kosmologi

Människan har i årtusenden skådat stjärnorna och undrat vem som satte dem där. Var det mästersmeden Ilmarinen, han som hamrat himlavalvet? Var det Olympens gudars sätt att hedra hjältarna? Var det Tor som kastade en frusen tå mot skyn?

Vi kommer nu studera vad den allmänna relativitetsteorin kan säga om kosmos. Hur det började, hur vi kom hit och vad som väntar. Först en återblick på universum.

14.0 Kosmos

Kosmos verkar följa den *koperniska principen*. Naturens lagar förändras inte vid translationer i tid och rum. Vidare följer av Einsteins postulat att position och hastighet är relativa och varje referensram därför är lika giltig. Det finns en oregelbundenhet i kosmos, i det att symmetrier verkar saknas. Kosmos är varken tomt eller homogent, inte ens isotropt. Dessa oregelbundenheter måste komma från något. Einsteins teori kan inte förklara asymmetrier, men det kanske *kvantteorier* kan.

Historiskt har vi naturfilosofiska funderingar om kosmos från de gamla grekerna och framåt. Med utvecklingen av optiska verktyg så som teleskop har man kunnat samla in information om rymden omkring vår planet och på så sätt kunnat lära sig om universum. De flesta sådana mätningar grundar sig på ljus som färdas genom rymden. Bland annat kan man mäta gravitationellt rödskifte och Doppler-effekten.

14.1 Expansion

Något som man på så sätt kunnat mäta är universums expansion, som ibland kallas för *Hubble-expansionen*. Om vi föreställer oss stjärnorna i ett kubiskt *Bravais-gitter* med längd a så kommer två intill-liggande stjärnor vid en expansion, efter tiden dt , att flyttas till ett avstånd på $a + da$, alltså med hastigheten $v = \frac{da}{dt}$. Om vi tar två stjärnor k längder bort så kommer de flyttas från varandra med ett avstånd på $ka + kda$. Den har alltså rört sig med hastighet $v = k \frac{da}{dt}$. Så för ett avstånd på $\Delta X = ka$ har vi hastigheten

$$\begin{aligned} v &= \frac{k \frac{da}{dt}}{ka} \Delta x \\ (258) \quad &= \frac{\frac{da}{dt}}{a} \Delta x \\ &= H \Delta x \end{aligned}$$

Där vi infört *Hubble-parametern*, $H = \frac{\dot{a}}{a}$. Det skulle kunna vara så att H inte är konstant.

Om vi föreställer oss några stjärnor som är i vila, borde de inte dra ihop sig snarare än att expandera? Gravitation brukar ju vara attraktiv. En möjlig förklaring är att expansionen är effekten av en explosion som kallas för *den stora smällen*, eller på engelska *The Big Bang*. Universum skulle enligt den tanken sprungit ur en singularitet och från den all oregelbundenhet[†]. Ett till tecken på att den stora smällen kan ha skett är observationer av kosmisk bakgrundsstrålning. Ett annat är den så kallade nucleosyntesen, alltså hur atomkärnorna formades. Vi kan betrakta förhållandet mellan väte och helium i stjärnor och formationen av tyngre kärnor.

14.2 Universums ålder

Om vi mäter förhållandet mellan två isotoper av uran, U^{235} och U^{238} , så kan vi med kunskap om deras sönderfallskonstanter och ett antagande om att de skapades i ungefär lika stora proportioner från början räkna ut att de skapades för ungefär $(13 \pm 2) \cdot 10^9$ år sen.

En annan metod är att mäta anisotropin hos kosmisk bakgrundsstrålning, då får man $(13.7 \pm 0.2) \cdot 10^9$ års ålder.

En tredje metod är att anta att Hubble-parametern är konstant, H_0 , och därifrån räkna ut hur lång tid det borde ha tagit för universum att nå den utspridningsgraden som vi kan observera. Då landar man på omkring $(14 \pm 1) \cdot 10^9$ år.

14.3 Den kosmologiska konstanten, Λ

Vi har tidigare, i vår härledning av Einsteins fältekvationer, nämnt att det går att lägga till en konstant, Λ , i beräkningarna och ändå nå ett rimligt uttryck för stationär verkan och därifrån korrekta rörelseekvationer. Vi ser tillbaka på ekvation 99 som lyder

$$(259) \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Denna konstant togs inte på allvar förut utan sattes till 0. Vem är vi att bara sätta den till 0? Vi försöker i stället anpassa den till observationerna.

En positiv konstant skulle motverka gravitationen med en avståndsbeorende repulsiv kraft. Om vi använder den tredje metoden för att bestämma universums ålder så kommer en naiv modell överskatta universums ålder eftersom den inte tar hänsyn till den starkare gravitationskraften då materia var närmre varandra. Läger vi å andra sidan till den kosmologiska konstanten så får vi en motsatt effekt, alltså att då materia kommer längre ifrån varandra så accelererar dem. Dessa motverkande effekter gör att metoden kanske underskattar eller överskattar universums ålder.

[†] Inte bara materiens utspridning utan även elektrisk laddning och balansen mellan materia och anti-materia, för mer om sådant, se exempelvis [pseskin].

14.4 Universums utveckling, den tidiga epoken

Låt oss börja med att göra några antaganden. Detta tvingas vi till på grund av att Einsteins fältekvationer är icke-linjära och i allmänhet svåra att lösa.

14.4.0 Antaganden

Vi gör två symmetriantaganden

- ★ Homogenitet – universum ser likadant ut överallt
- ★ Isotropi – universum ser likadant ut i varje riktning

Dessa två a priori-antaganden reducerar kraftigt ned komplexiteten i fältekvationerna. Det är inte lätt att motivera dessa två antaganden, och de är ifrågasättbara. Utan dem kommer vi emellertid inte någon vart.

Antagandena leder till sex rumsliga symmetrier, tre med avseende på rotation och tre med avseende på translation.

Anmärkelse. Detta kan ekvivalent uttryckas i termer av sex rumsliga Killing-fält. Dessa är vektorfält vars integralkurvor inducerar ett flöde. Derivatans av tillbakaryckningen av det en tensor längs flödet med avseende på flödesparametern kallas för Lie-derivatan. Om metriska tensorn är oförändrad längs ett flöde, alltså dess Lie-derivata försvinner, så är vektorfältet som flödet är integralkurvor till (ekvivalent hastigheten av integralkurvorna) ett Killing-fält. Se kapitel 15 för mer information.

Den 3-dimensionella delmångfalden som utgör rummet, utan tid, har sex oberoende komponenter i sin metrik (kom ihåg att den är symmetrisk). Vi utnyttjar att det maximala antalet symmetrier för en d -dimensionell mångfald är $\frac{d(d+1)}{2}$ (se sats 9 inklusive bevis), vilket är lika många som dess metrik har oberoende komponenter, se kapitel 15 för ett bevis. Med andra ord är vår rumsliga delmångfald maximalt symmetrisk och har konstant krökning, κ . Sådana mångfalder kan inte se ut på så många sätt enligt *Killing-Hopf-satsen*[†]. Vi kan dela in dem i tre fall

- ★ $\kappa = 0$ – Platt
- ★ $\kappa > 0$ – Sfär, kallas ibland för *de Sitter-rum*
- ★ $\kappa < 0$ – Hyperbel, kallas ibland för *anti de Sitter-rum*

[†]Denna är applicerbar eftersom den rumsliga delen av rumtiden utgör en Riemannsk mångfald (singaturen har bara ett tecken). Satsen relaterar ganska mycket till Poincarés förmodan, som nu är bekräftad.

och nedteckna den rumsliga Riemann-Christoffel-tensorn

$$(260) \quad B_{abcd} = \kappa(\gamma_{ac}\gamma_{bd} - \gamma_{ad}\gamma_{bc})$$

där vi även infört γ_{ab} som den rumsliga metriken, som vi i sfäriska koordinater kan skriva som

$$(261) \quad \gamma = \frac{1}{1 - \kappa r^2} dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta + r^2 \sin^2(\theta) d\varphi \otimes d\varphi$$

Notera hur om vi sätter krökningen till noll, $\kappa = 0$, får vi åter platt rum.

Denna rumsliga metrik är relaterad till rumstidens metrik med en skalfaktor, $a^2(t)$, som alltså beskriver universums expansion. Detta är densamma som i Hubble-parametern ovan.

$$(262) \quad g = dt \otimes dt - a^2(t)\gamma$$

Detta får bli vår maximalt symmetriska ansats.

14.4.1 Einstein-tensorn

Nu vill vi nedteckna Einstein-tensorn i vår ansats-metrik. I vanlig ordning börjar vi med att räkna ut förbindelsekoefficienterna. Termerna på formen Γ^a_{bc} går att räkna ut. Termerna på formen Γ^0_{ab} och Γ^a_{0b} blir

$$(263) \quad \begin{aligned} \Gamma^0_{ab} &= a\dot{a}\gamma_{ab} \\ \Gamma^a_{0b} &= \frac{\dot{a}}{a}\delta^a_b \end{aligned}$$

Alla andra förbindelsekoefficienter försvinner. Från detta får vi vår Ricci-tensor

$$(264) \quad \begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a} \\ R_{ab} &= (a\ddot{a} + 2(\dot{a})^2 + 2\kappa)\gamma_{ab} \end{aligned}$$

14.4.2 Materia i homogent och isotropt universum

Nu vill vi nedteckna SEM-tensorn för någon fördelning av materia och rörelsemängd i universum.

Vi tänker oss att materia följer ett tidslikt flöde genom universum. Låt oss kalla hastigheten för u . Den kommer i vårt koordinatsystem att vara helt riktad i tiden, annars skulle vi inte ha isotropi.

Vi parametriserar $T^{\mu\nu}$ med två funktioner av tidskoordinaten, $p(t)$ och $\rho(t)$.

$$(265) \quad T^{\mu\nu} = (\rho(t) + p(t))u^\mu u^\nu + p(t)g^{\mu\nu}$$

Rent fysikaliskt representerar detta en perfekt vätska med densitet $\rho(t)$ och tryck $p(t)$.

14.4.3 Test av vår ansats

Vi sätter in våra antaganden i fältekvationerna på formen enligt ekvation 97

$$(266) \quad R_{\mu\nu} = 8\pi(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu})$$

Från 00-ekvationen får vi *accelerationsekvationen*

$$(267) \quad \ddot{a} = -\frac{4\pi G_N}{3}(\rho + 3p)a + \frac{\Lambda}{3}$$

Där vi låtit Λ vara med också. Från de rumslika ekvationerna får vi *Friedmann-ekvationen*

$$(268) \quad \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G_N}{3}\rho - \frac{\kappa}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \\ = H^2$$

Där vi insett att $\frac{\dot{a}}{a}$ är Hubble-parametern som vi tidigare lärt känna.

Vi har alltså två ekvationer, men tre okända, ρ , p och a som alla beror av t . För att få någon ordning på detta behöver vi fler relationer.

14.5 Modeller för vätskor

Med en relation mellan ρ och p skulle vi ha nog information för att lösa ovanstående ekvationer. Vi kallar ett sådant förhållande för vätskans *tillståndsekvation*

$$(269) \quad p = P(\rho)$$

Ofta tänker man sig ett linjärt fall, på formen $p = \omega\rho$, för någon konstant ω .

Några fall av ω som kan studeras är

- ★ $\omega = \frac{1}{3}$ – Strålning, alltså en vätska av fotoner
- ★ $\omega = 0$ – Damm, inget tryck
- ★ $\omega = -1$ – Kosmologisk, tillåter oss att baka in Λ i trycket p

Det första fallet kan fås av att $T^\mu_\mu = 0$ för Maxwell-tensorn, så om vår SEM-tensor skall modellera fotoner så måste även den vara spårlös.

14.5.0 Lösningar

Låt oss nu lösa ekvationerna 267 och 268 för något val av ω . Vi kommer fram till några slutsatser.

Till att börja med inför vi följande funktion

$$(270) \quad n(\omega) = 3 + 3\omega$$

För det enklaste fallet, $\kappa = 0$ och $\Lambda = 0$ så löser vi ut $\frac{\dot{a}}{a}$ och får att den alltid visar följande proportionalitet

$$(271) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= H^2 \\ &\propto \rho \\ &\propto a^{-n(\omega)} \end{aligned}$$

Vidare kan vi lösa ut a och får

$$(272) \quad \begin{aligned} a(t) &= a_0 t^{\frac{2}{n(\omega)}}, \quad \omega \neq -1 \\ a(t) &= e^{Ht}, \quad \omega = -1 \end{aligned}$$

Där situationen $\omega = -1$ motsvarar det kosmologiska fallet med någon konstant, H .

Mer allmänt, för alla typer utom $\omega = -1$ har vi att

$$(273) \quad \rho(t) \propto t^{-2}$$

Tabell 2: Olika värden för ω för tillståndsekvationen $p = \omega\rho$.

ω	$n(\omega)$	$a(t)$	Typ
$\frac{1}{3}$	4	$\sqrt{t}$	Strålning
0	3	$t^{\frac{2}{3}}$	Damm
-1	0	e^{Ht}	Kosmologisk konstant

Detta får den märkliga konsekvensen, att i punkten $t = 0$ (för vårt val av koordinater) exploderar densiteten. Detta är *The Big Bang*.

14.6 Universums utveckling, den senare epoken

Nu funderar vi över situationen då vi har olika modeller för materia samtidigt. Vi håller oss fortfarande till linjära modeller, ω konstant med några speciella värden som vi tidigare beskrivit.

Vi betraktar ett universum som är en linjärkombination av olika ω , säg ω_j .

14.6.0 Densitetsparametrar

Det visar sig smidigt att införa *densitetsparametrar*, Ω_j , på formen

$$(274) \quad \Omega_j = \frac{8\pi G_N}{3} \frac{1}{H^2} \rho_j$$

för materietypen ρ_j som motsvarar ω_j . Den första faktorn är bara en konstant skalfaktor. Den andra faktorn är en funktion av tiden som agerar ett slags normering. Med dessa parametrar kan vi på ett enkelt sätt jämföra densiteternas inverkan med dem som vi får från $\kappa \neq 0$ och $\Lambda \neq 0$.

$$(275) \quad \begin{aligned} \Omega_\kappa &= -\frac{\kappa}{H^2 a^2} \\ \Omega_\Lambda &= \frac{\Lambda}{3H^2} \end{aligned}$$

Med dessa kan vi skriva om Friedmann-ekvationen, 268, som

$$(276) \quad \Omega_\kappa + \Omega_\Lambda + \sum_j \Omega_j = 1$$

och accelerationsekvationen, 267, som

$$(277) \quad \frac{1}{H^2} \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2} \left(\Omega_\Lambda + \sum_j (1 + 3\omega_j) \Omega_j \right)$$

14.6.1 Dominerande materiemodell under universums utveckling

Vi vet att

$$(278) \quad \rho_j \propto a^{-n(\omega_j)}$$

Detta ger oss ett förhållande mellan densitetsparametrarna

$$(279) \quad \Omega_\Lambda \propto a^2 \Omega_\kappa \propto a^3 \Omega_M \propto a^4 \Omega_\gamma$$

där vi infört Ω_M för damm och Ω_γ för strålning. Vi kan göra observationen att i ett expanderande universum så har vi $H > 0$ ty $\dot{a} > 0$ och $a > 0$. Med det kommer att a ökar med tiden. Vi kan då säga något om hur dessa densitetsparametrar förhåller sig till varandra i tiden.

I ett tidigt skede, då a är liten så dominerar strålning, Ω_γ . Med tiden blir den mindre viktig och Ω_M dominerar. Sedan skiftar det åt att Ω_κ dominerar. Då tiden går mot oändligheten kommer Ω_Λ vara den enda relevanta densiteten.

Dessa förhållanden beskriver alltså olika epoker i universums tidsålder.

14.7 Ett sent universum

Vi antar att vi har bidrag från Ω_M , Ω_κ och Ω_Λ , men att bidraget från Ω_γ är försumbart. Det ger, till synes, tre frihetsgrader, men Friedmann-ekvationen på formen i ekvation 276 innebär att en parameter kan skrivas i termer av två andra, exempelvis

$$(280) \quad \Omega_\kappa = 1 - \Omega_M - \Omega_\Lambda$$

så vi har bara två frihetsgrader.

Vi kan nu börja klassificera olika kombinationer av dessa parametrar.

14.7.0 Krökningsregioner

Vi har för $\kappa = 0$ att $\Omega_\kappa = 0$. Det medför

$$(281) \quad \Omega_\Lambda = 1 - \Omega_M$$

Om vi utför en mätning av dessa två parametrar och hamnar på den linjen har vi alltså att $\kappa = 0$, och universum är platt. Om vi mäter $\Omega_\Lambda > 1 - \Omega_M$ får vi att $\kappa > 0$, och universum är alltså sfäriskt. Om vi slutligen mäter $\Omega_\Lambda < 1 - \Omega_M$ får vi att $\kappa < 0$, och universum är alltså hyperboloiskt.

14.7.1 Accelerationsregioner

Om vi i stället för Friedmann-ekvationen använder accelerations-ekvationen så kan vi dela in mätningarna i tre regioner för olika värden av accelerationen för universums expansion, $\ddot{a}$. Vi har

$$(282) \quad \begin{aligned} \frac{1}{H^2} \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{1}{2} \left(\Omega_\Lambda + \sum_j (1 + 3\omega_j) \Omega_j \right) \\ &= -\frac{1}{2} [(1 + \omega_M) \Omega_M + (1 + \omega_\Lambda) \Omega_\Lambda] \\ &= -\frac{1}{2} \Omega_M + \Omega_\Lambda \end{aligned}$$

För konstant expansionshastighet, $\ddot{a} = 0$, gäller alltså $\Omega_\Lambda = \frac{1}{2} \Omega_m$.

14.7.2 Återkollaps

En sista grej vi kan fundera över är om det finns någon tid, τ , sådan att

$$(283) \quad \begin{aligned} \dot{a}(\tau) &= 0 \\ \ddot{a}(\tau) &< 0 \end{aligned}$$

I så fall har expansionen ett maximum, och sedan vänder den och universum krymper för att slutligen åter kollapsa. Detta kallas ibland för *The Big Crunch* eller, med mindre dramatiska termer, *återkollaps*. Alternativet är oändlig expansion.

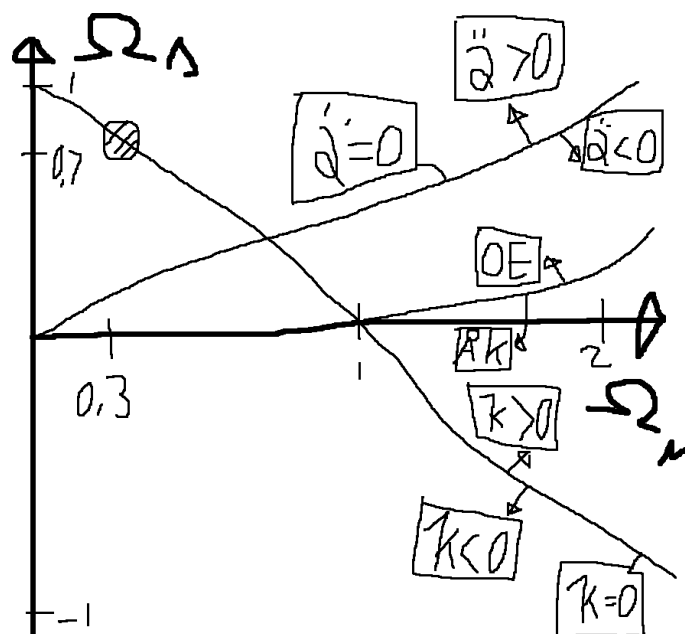
14.8 Mätningar, mörk materia och energi

Nu när vi undersökt vad de olika kombinationerna av densitetsparametrarna ger för universum kan vi jämföra med faktiska mätningar. Det visar sig att vi har ungefär

$$\begin{aligned}
 (284) \quad & \Omega_\kappa = 0 \\
 & \Omega_M = 0.3 \\
 & \Omega_\Lambda = 0.7
 \end{aligned}$$

Detta skulle sätta oss precis på linjen för $\kappa = 0$, alltså ett platt universum. Vidare hamnar vi i regionen där $\ddot{a} > 0$, alltså accelererande expansion. Slutligen finner vi oss i regionen för oändlig expansion. Det bör tilläggas att det såklart finns mätonoggrannheter, så det är möjligt att vi inte ligger exakt på exempelvis $\kappa = 0$.

För en skiss över de olika regionerna och experimentellt uppmätt värde, se figur 28.



Figur 28: Densitetsparametrar och de olika regionerna som kombinationer dem emellan bildar. Det experimentella värdet för dem är inritat som en snedstreckad cirkel. Två linjer är inritade som delar parameterrummet i olika fall med avseende på tecken för κ och $\ddot{a}$. En tredje kurva delar parameterrymden i fallet oändlig expansion (markerat OE) och återkollaps (markerat ÅK). Formen på denna kurva är inte härledd här, men en viktig egenskap är att den alltid ligger i regionen $\ddot{a} < 0$, ty annars skulle det inte finnas ett maximum för a .

Vi kan alltså säga att bidragen från densitetsparametrarna är

$$\begin{array}{rcl}
 & & \text{Krökning} \rightarrow 0\% \\
 (285) & & \text{Materia} \rightarrow 30\% \\
 & & \text{Kosmologisk konstant} \rightarrow 70\%
 \end{array}$$

Det finns ett stort problem i det, nämligen att observationer av observerbar materia endast uppgår till 5%. Det innebär att det borde finnas motsvarande 25% materia i andra former än dem som vi kan observera (standardmodellens partiklar). Denna form av materia kallas därför för *mörk materia*. Vi kan inte observera den annat än i dess gravitationella effekt. På samma sätt ges ofta bidraget från den kosmologiska konstanten namnet *mörk energi*. Vi kan alltså skriva om biragen som

$$\begin{array}{rcl}
 & & \text{Krökning} \rightarrow 0\% \\
 (286) & & \text{Materia från standardmodellen} \rightarrow 5\% \\
 & & \text{Mörk materia} \rightarrow 25\% \\
 & & \text{Mörk energi} \rightarrow 70\%
 \end{array}$$

Detta avslutar den tillämpade delen av dessa lektioner.

IV: Fördjupning

15 Extralektion: matematisk fördjupning

Om jag bara kände till mer matematik!

Erwin Schrödinger, översatt från tyska

Häri presenteras blandade ämnen som relaterar till den matematik som ligger bakom den allmänna relativitetsteorin. En del av härledningarna ovan lämnade luckor som vi här ämnar fylla i gen. Därtill presenteras ett fåtal ämnen inom differentialgeometri som kan vara av intresse men som mest är för att väcka törsten efter fortsatta studier.

15.0 Härledning av Euler-Lagranges ekvationer

Vi ska nu härleda Euler-Lagranges ekvationer så som de presenterades och nyttjades i kapitel 4 och 6.

Vi börjar med en lagrangian (egentligen lagrangiansitet, se kapitel A) på formen

$$(287) \quad \mathcal{L}(\partial_\mu \Phi_j(x^\mu), \Phi_j(x^\mu), x^\mu)$$

Den beror alltså av koordinater (vi antar d dimensioner), ett antal skalärfunktioner och dessa skalärfunktioners derivator i de olika koordinatriktningarna. Vi betecknar dess verkan med

$$(288) \quad S = \int d^d x \mathcal{L}$$

Villkoret för stationär verkan säger att variationen av denna skall försvinna

$$(289) \quad \begin{aligned} 0 &= \delta S \\ &= \delta \int d^d x \mathcal{L} \\ &= \int d^d x \delta \mathcal{L} \end{aligned}$$

med villkoret att variationen i ändpunkterna försvinner. För en kurva innebär det alltså vid kurvparameterns ändpunkter. För ett fält över $\mathbb{R}^d$ innebär det mot oändligheten.

Låt oss betrakta fallet då lagrangianen är symmetrisk med avseende på translation i $x^\mu \rightarrow x^\mu + \Delta x^\mu$.

(290)

$$\mathcal{L}(\partial_\mu \Phi_j(x^\mu), \Phi_j(x^\mu), x^\mu) = \mathcal{L}(\partial_\mu \Phi_j(x^\mu + \Delta x^\mu), \Phi_j(x^\mu + \Delta x^\mu), x^\mu + \Delta x^\mu)$$

Då kan vi skriva variationen som

$$(291) \quad \int d^d x \delta \mathcal{L} = \int d^d x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} \delta(\partial_\mu \Phi_j) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_j} \delta \Phi_j \right]$$

Nu utnyttjar vi att $\delta(\partial_\mu \Phi_j) = \partial_\mu(\delta \Phi_j)$.

$$(292) \quad \int d^d x \delta \mathcal{L} = \int d^d x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} \partial_\mu(\delta \Phi_j) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_j} \delta \Phi_j \right]$$

För att inse att detta stämmer kan vi gå tillbaka till definitionen av variationen

$$(293) \quad \begin{aligned} \delta(\partial_\mu \Phi_j) &= \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \partial_\mu(\Phi_j + \varepsilon \delta \Phi_j) \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \partial_\mu \Phi_j + \varepsilon \partial_\mu(\delta \Phi_j) \\ &= \partial_\mu(\delta \Phi_j) \end{aligned}$$

Mer allmänt kan sådana argument göras för alla linjära operatorer, F , alltså $\delta F(g) = F(\delta g)$, för någon funktion g . Om vi nu utnyttjar kan vi skriva om första termen i integranden tack vare produktregeln:

$$(294) \quad \begin{aligned} \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} \delta \Phi_j \right) &= \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} \delta \Phi_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} \partial_\mu(\delta \Phi_j) \\ &\iff \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} \partial_\mu(\delta \Phi_j) &= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} \delta \Phi_j \right) - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} \delta \Phi_j \end{aligned}$$

Vi sätter in detta och får

$$(295) \quad \int d^d x \delta \mathcal{L} = \int d^d x \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} \delta \Phi_j \right) - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} \delta \Phi_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_j} \delta \Phi_j \right]$$

Med våra statiska randvillkor inser vi att den första termen försvinner. Partiell integration, exempelvis, ger att den beror av variationen vid randen som försvinner. Kvar blir alltså

$$\begin{aligned}
(296) \quad \int d^d x \delta \mathcal{L} &= \int d^d x \left[-\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} \delta \Phi_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_j} \delta \Phi_j \right] \\
&= \int d^d x \left[-\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_j} \right] \delta \Phi_j
\end{aligned}$$

För att detta skall försvinna för godtycklig variation, $\delta \Phi_j$, så har vi alltså villkoret

$$(297) \quad 0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_j}$$

Det är detta som kallas för *Euler-Lagranges-ekvationer*, och vi får en sådan för varje fält, Φ_j .

15.1 Noethers sats

Det skulle inte skada det gamla gardet vid Göttingen att bli undervisade av fröken Noether. Hon kan sina grejer.

Albert Einstein, översatt från tyska

Vi gjorde en skissartad formulering av *Noethers sats* i kapitel 6. Den är central inom fältteori och därför många moderna fysikaliska teorier. Nu är det dags att formulera den ordentligt och bevisa den.

Sats 0 (Noethers sats)

Varje kontinuerlig symmetri till en lagrangian ger upphov till en bevarad ström och varje bevarad ström motsvarar en kontinuerlig symmetri till lagrangianen. ♣

Låt oss nu försöka bevisa detta och förklara vad det betyder.

Bevis

Låt $\mathcal{L}(\partial_\mu \Phi_j, \Phi_j)$ vara en lagrangian för ett gäng fält, Φ_j .

Låt X vara en kontinuerlig transform av dessa fält

$$(298) \quad \Phi'_j(x^\mu) = \Phi_j(x^\mu) + X_j[\Phi_j(x^\mu)]$$

Då är X en symmetritransform av fälten, givet lagrangianen, om de bara påverkar lagrangianens verkan med en divergensterm (ibland kallat för *ytterm*), alltså en term som inte påverkar variationen. Mer konkret

$$(299) \quad \begin{aligned} \mathcal{L} &\rightarrow \mathcal{L}(\partial_\mu \Phi'_j, \Phi'_j) \\ &= \mathcal{L}(\partial_\mu \Phi_j, \Phi_j) + \partial_\mu F^\mu \end{aligned}$$

Då får vi att verkan förändras

$$(300) \quad \int d^d x \mathcal{L} \rightarrow \int d^d x \mathcal{L} + \partial_\mu F^\mu$$

Så vi ser att villkoret $\delta S = 0$ inte förändras eftersom den sista termen försvinner vid partiell integration.

Låt nu X vara en godtycklig kontinuerlig transform i fälten, så att

$$(301) \quad X_j(\Phi_j) = \delta\Phi_j$$

Då kommer lagrangianen förändras enligt

$$(302) \quad \delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(\partial_\mu(\Phi_j + \delta\Phi_j), \Phi_j + \delta\Phi_j) - \mathcal{L}(\partial_\mu\Phi_j, \Phi_j)$$

Vi taylorutvecklar och ignorerar termer av ordning $\delta\Phi_j$ eller högre.

$$(303) \quad \delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_j} \delta\Phi_j + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_j)} \delta(\partial_\mu\Phi_j)$$

Här kan vi använda samma trick som förut, $\delta(\partial_\mu\Phi_j) \rightarrow \partial_\mu(\delta\Phi_j)$ och produktregeln baklänges, se ekvation 294,

$$(304) \quad \delta\mathcal{L} = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_j} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_j)} \right) \delta\Phi_j + \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_j)} \delta\Phi_j \right)$$

Vi känner igen den första parentesen som Euler-Lagranges-ekvationer. De försvinner. Kvar blir alltså

$$(305) \quad \delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_j)} \delta\Phi_j \right)$$

Låt oss kalla detta för $\delta\mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu$. För en allmän kontinuerlig transform, X har vi alltså

$$(306) \quad \begin{aligned} \partial_\mu F &= \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_j)} X_j(\Phi_j) \right) \\ &\iff \\ 0 &= \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_j)} - F^\mu \right) \end{aligned}$$

Vi har alltså i högerledet en bevarad ström, alltså ett divergensfritt vektorfält, j^μ definierat enligt

$$(307) \quad j^\mu = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_j)} - F^\mu \right)$$

Baklängesvägen är uppenbar (antag en divergensfri ström på den formen, sätt in och se att det motsvarar en kontinuerlig symmetri). $\boxtimes$

Anmärkelse. Det är centralt att förstå skillnaden mellan termerna i parenteserna i ekvation 306. Det är lätt vid en första anblick att tänka att de är desamma. Om man inte inser skillnaden bör man gå igenom några exemplares.

För att göra detta mer tydligt söker vi härleda några sådana bevarade strömmar. Detta gjordes skissartat i lektionen om materia, kapitel 6, men här ämnar vi göra det mer grundligt.

15.1.0 SEM-tensorn

Låt oss betrakta en teori som är symmetrisk med avseende på translation i rum och tid. Då kan vi göra transformen på koordinaterna

$$(308) \quad x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu - \varepsilon^\mu$$

Fältet ändrar sig enligt

$$(309) \quad \Phi(x^\mu) \rightarrow \Phi'(x^\mu) = \Phi(x^\mu + \varepsilon^\mu)$$

Expandera och ignorera andra ordningen i ε

$$(310) \quad \Phi(x^\mu + \varepsilon^\mu) = \Phi(x^\mu) + \varepsilon^\nu \partial_\nu \Phi(x^\mu)$$

På liknande sätt ändrar sig då vår lagrangian

$$(311) \quad \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}(x'^\mu) = \mathcal{L}(x^\mu + \varepsilon^\mu)$$

Vi expanderar och ignorerar andra ordningen i ε .

$$(312) \quad \mathcal{L}(x^\mu + \varepsilon^\mu) = \mathcal{L}(x^\mu) + \varepsilon^\nu \partial_\nu \mathcal{L}(x^\mu)$$

Där den sista differentialoperatorn såklart är den totala derivatan med avseende på koordinaten (snarare än att skriva ut alla partialderivatorna explicit). Den sista termen är vår $\partial_\nu F^\nu$. Dessa utgör fyra olika symmetritransformer. Vi tar dem en och en i ordning. Låt transformerna vara en i varje koordinatriktning med längd ε . Vi tar det i riktningen x^ν och får då bevarad ström, j_ν^μ enligt (vi kan bryta ut ε)

$$(313) \quad \begin{aligned} 0 &= \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \partial_\nu \Phi - F_\nu^\mu \right] \\ j_\nu^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \partial_\nu \Phi - F_\nu^\mu \end{aligned}$$

Dessa är alltså, en för varje riktning, ν , bevarade strömmar. Med vår definition av F^μ i varje riktning, F_ν^μ definierar vi

$$(314) \quad T_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \partial_\nu \Phi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}$$

15.1.1 Elektrisk ström

Låt oss föreställa oss en lagrangian på formen

$$(315) \quad \mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi + m^2 \Phi^* \Phi$$

Där Φ^* är komplexkonjugatet av Φ . Vi betraktar dem som oberoende fält, och det är ett sätt att göra det på men man hade lika gärna kunnat studera till exempel realdelen för sig och imaginärdelen för sig. En sådan lagrangian är invariant under symmetritransformen

$$(316) \quad \Phi \rightarrow \Phi' = \Phi e^{i\alpha}$$

Där α är en reell parameter. Notera här att vi inte har någon divergensterm, $F^\mu = 0$. För en infinitesimal transform kan vi ignorera högre ordningens störningar och få

$$(317) \quad \begin{aligned} \Delta\alpha\Phi &= i\alpha\Phi \\ \Delta\alpha\Phi^* &= -i\alpha\Phi^* \end{aligned}$$

Vi får då den bevarade strömmen

$$(318) \quad \begin{aligned} j^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} i\Phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi^*)} i\Phi \\ &= i(\Phi\partial^\mu\Phi^* - \Phi^*\partial^\mu\Phi) \end{aligned}$$

Detta är den bevarade strömmen som motsvarar elektrisk ström för en teori där Φ representerar ett fält för laddade partiklar och Φ^* ett fält för partiklar med motsatt laddning, alltså anti-partiklar.

15.2 Palatinis identitet

I variationen av Hilberts verkan, kapitel 7, använde vi oss av *Palatini-identiteten* utan att härleda den.

Sats 1 (Palatinis identitet)

Givet Levi-Civita-förbindelsen kan variationen av Ricci-tensorn skrivas som kovarianta derivator av variationen av förbindelsekoefficienter

$$\delta R_{\sigma\nu} = \nabla_\rho \delta \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \nabla_\nu \delta \Gamma^\rho_{\rho\sigma} \quad \boxtimes$$

Vi får väl försöka bevisa det med vad vi redan vet, men först behöver vi ett litet resultat

Sats 2 (Förbindelsekoefficientens tensoregenskap)

Skillnaden mellan två förbindelsekoefficienter är en $(2,1)$ -tensor. $\boxtimes$

Vi börjar med att bevisa denna lilla sats

Bevis

För att inse att skillnaden mellan två förbindelsekoefficienter är en tensor, alltså en multilinjär avbildning, kan vi betrakta hur förbindelsekoefficienten förändras vid ett basbyte. Vi betraktar två baser, e_μ som induceras av kartan x , och f_μ som induceras av kartan y . Då har vi att

$$(319) \quad f_\mu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} e_\alpha$$

Vi minns att den kovarianta derivatan av en basvektor ger oss förbindelsekoefficienten

$$(320) \quad \nabla_{f_\mu} f_\nu = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(y) f_\alpha$$

Låt oss nu göra basbytet. $f_\mu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} e_\alpha$. Sätt in det i uttrycket

$$(321) \quad \begin{aligned} \nabla_{f_\alpha} f_\beta &= \nabla_{f_\alpha} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\beta} e_\mu \right) \\ &= \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} e_\mu + \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\beta} \nabla_{e_\lambda} e_\mu \\ &= \left(\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta} \Gamma_{\lambda\mu}^\nu(x) \right) e_\nu \end{aligned}$$

Vi inser att högerledet i ekvation 320 kan skrivas om som (byt bara bas för vektorn)

$$(322) \quad \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(y) f_\alpha = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(y) \left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\alpha} \right) e_\lambda$$

En jämförelse mellan detta och sista versen i ekvation 321 leder till att förbindelsekoefficienterna måste transformeras enligt (verka med inversen av $\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\alpha}$)

$$(323) \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(y) = \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\beta} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^\nu(x) + \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\nu}$$

Vi kan från denna transformegenskap se att den första termen är vad vi förväntar oss av en tensor, den transformerar som en multilinjär avbildning. Den andra termen förstör den egenskapen. Vi kan också se att den andra termen alltid ser likadan ut, oavsett vad det är för förbindelsekoefficient. Det innebär att den termen försvinner för transformen av skillnaden mellan två förbindelsekoefficienter. En sådan skillnad transformerar därför som en tensor. Därmed har vi fått vad vi ville. $\boxtimes$

Nu kan vi gå vidare till beviset för Palatinis identitet

Bevis

Vi går till Riemann-Christoffel-tensorns definition i termer av Levi-Civita-förbindelsen (se ekvation 17)

$$(324) \quad B^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}$$

Vi tar nu dess variation (och använder även här att $\delta(\partial_\mu f) = \partial_\mu(\delta f)$)

$$(325) \quad \begin{aligned} \delta B^\rho_{\sigma\mu\nu} &= \partial_\mu \delta \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \delta \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \\ &+ \delta \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \delta \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \delta \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \end{aligned}$$

Här utnyttjar vi egenskapen att skillnaden mellan två förbindelsekoefficienter är en tensor. Det medför att vi kan ta kovarianta derivator av skillnader, så som $\delta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$. Vi gör det:

$$(326) \quad \begin{aligned} \nabla_\mu \delta \Gamma^\rho_{\nu\sigma} &= \partial_\mu \delta \Gamma^\rho_{\nu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \delta \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \delta \Gamma^\rho_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \delta \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \\ &\iff \\ -\partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} &= \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \delta \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \delta \Gamma^\rho_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \delta \Gamma^\rho_{\nu\lambda} - \nabla_\mu \delta \Gamma^\rho_{\nu\sigma} \end{aligned}$$

Använd den sista likheten för att ersätta alla termer på formen $\partial \Gamma$. Då försvinner nästan alla termer. Det enda som blir kvar är

$$(327) \quad \delta B^\rho_{\sigma\mu\nu} = \nabla_\mu \delta \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \nabla_\nu \delta \Gamma^\rho_{\mu\sigma}$$

Nu kan Palatinis identitet enkelt fås genom att dra samman två indices (definitionen av Ricci-tensorn)

$$(328) \quad \begin{aligned} \delta R_{\sigma\nu} &= \delta B^\rho_{\sigma\rho\nu} \\ &= \nabla_\rho \delta \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \nabla_\nu \delta \Gamma^\rho_{\rho\sigma} \end{aligned}$$

Så enkelt var det. ✂

15.3 Mer om mångfalder och knippen

Vi gick i de första lektionerna bara igenom det mest grundläggande om mångfalder. Några fler saker kan vi ta upp som är roliga att förstå sig på.

15.3.0 Delmångfalder

En enkel struktur vi kan skapa från en mångfald är en *delmångfald*. Det är en del av mångfalden som ärver topologin från den. För att definiera det behöver vi förstå hur man ärver en topologi. Vad vi behöver är *delmängdstopologin*

Definition 45 (Delmängdstopologi)

Låt $(M, \mathcal{O})$ vara en topologisk mängd och låt $N \subseteq M$. Då kommer mängden

$$\mathcal{O}|_N = \{U \cap N | U \in \mathcal{O}\}$$

utgöra en topologi för N som kallas för **delmängdstopologin** eller **underrumstopologin**. $\times$

Nu är vi redo att definiera delmångfalden.

Definition 46 (Delmångfald)

Låt $(M, \mathcal{O})$ vara en mångfald och låt $N \subseteq M$. Då är $(N, \mathcal{O}|_N)$ en mångfald som kallas för en **delmångfald** till $(M, \mathcal{O})$. $\times$

15.3.1 Framåtskjutningar och tillbakaryckningar

Låt oss nu definiera två viktiga begrepp. Vi börjar med att ge ett annat namn åt differentialen för en funktion i en punkt. Det låter märkligt och tills man studerat differentialgeometri är det märkligt.

Definition 47 (Framåtskjutning)

Låt $\Phi : M \rightarrow N$ vara en glatt avbildning mellan två basrum till var sitt knippe, (M, π_{TM}, TM) respektive (N, π_{TN}, TN) . Då är **framåtskjutningen** av Φ en funktion

$$\Phi_* : TM \rightarrow TN$$

sådan att

$$X \mapsto \Phi_*(X)$$

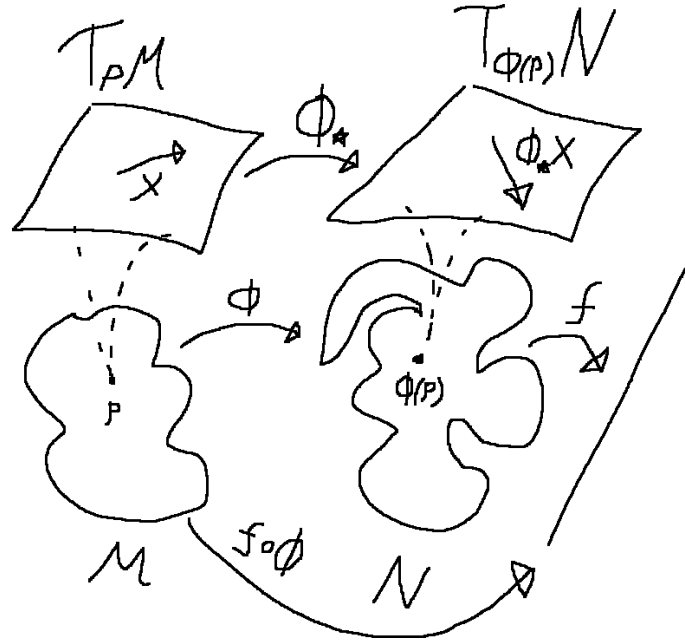
där den verkar på en glatt funktion, $f : N \rightarrow \mathbb{R}$, enligt

$$\Phi_*(X)(f) = X(f \circ \Phi)$$

$\times$

Framåtskjutningen tar alltså en vektor i $T_p M$ och avbildar på en vektor i $T_{\Phi(p)} N$ sådan att den nya vektorns verkan på en funktion motsvarar den gamla vektorns verkan på sammansättningen av Φ och funktionen. En skiss över situationen ges i figur 29.

Innan vi fortsätter så betraktar vi komponenter av dessa med avseende på kartor och kartinducerade baser. Låt (U, x) vara en karta ur en atlas, $\mathcal{A}_M$, för M , och (V, y) vara en ur, $\mathcal{A}_N$, för N . Då har vi att $\frac{\partial}{\partial x_{(p)}^\mu}$ (här är vi särskilt noggranna med notationen för att poängtera att tangentrummens basvektorer bara är giltiga i sitt tangentrum som hör till den associerade punkten på mångfalden) är



Figur 29: Skiss över framåtskjutningsavbildningen. Den tar vektorn X i $T_p M$ och avbildar på $\Phi_* X$ i $T_{\Phi(p)} N$ så att $\Phi_* X$ verkar på funktionen f på samma sätt som X verkar på funktionen $f \circ \Phi$.

basvektorer för $T_p M$ som inducerats av kartan. Då ska alltså $\Phi_* \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)$ vara en vektor i $T_{\Phi(p)} N$. Då ska vi kunna extrahera komponenterna (som hör till basen som induceras av y) ur denna vektor med hjälp av dualbasen, $dy^\nu_{(\Phi(p))}$ (där vi återigen har varit noggranna med att hänvisa till punkten) för $T^*_{\Phi(p)} N$. Vi får (håll koll på var baserna är giltiga, för notationen undertrycks härnäst)

$$\begin{aligned}
 \Phi_{*\mu}^\alpha &= dy^\alpha \left(\Phi_* \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \\
 &= \Phi_* \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) y^\alpha \\
 (329) \qquad &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} (y^\alpha \circ \Phi) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} (y \circ \Phi)^\alpha \\
 &= \frac{\partial \hat{\Phi}^\alpha}{\partial x^\mu}
 \end{aligned}$$

Där vi definierat $\hat{\Phi} = y \circ \Phi$. Notera här att $\dim(M)$ och $\dim(N)$ inte behöver vara lika och därför kommer eventuellt α och μ vara ur olika indexmängder.

Ja men framåtskjutning är ju fin och så men vad är den bra för? Följande sats

är ett fint resultat

Sats 3

Om $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ är en kurva på M och $\Phi \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow N$ är en kurva på N så kommer Φ_* att skjuta kurvans hastighet, v_γ till motsvarande kurvas hastighet, $v_{\Phi \circ \gamma}$, alltså $\Phi_*(v_\gamma) = v_{\Phi \circ \gamma}$. $\boxtimes$

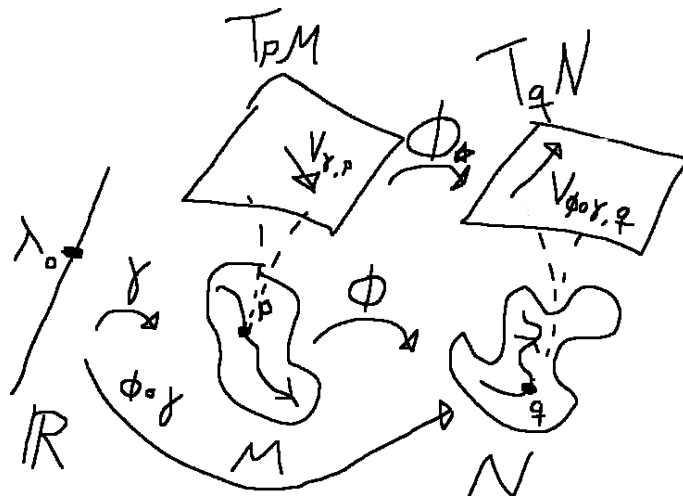
Bevis

Vi bevisar den punktvis. Låt $p = \gamma(\lambda_0)$. Då gäller för varje glatt funktion $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ att

$$\begin{aligned}
 \Phi_*(v_{\gamma,p})f &= v_{\gamma,p}(f \circ \Phi) \\
 &= ((f \circ \Phi) \circ \gamma)'(\lambda_0), \quad (\text{Definitionen av hastighet}) \\
 (330) \quad &= (f \circ (\Phi \circ \gamma))'(\lambda_0), \quad (\text{Sammansättning är associativt}) \\
 &= v_{\Phi \circ \gamma, \Phi(\gamma(\lambda_0))}f, \quad (\text{Definitionen av hastighet}) \\
 &= v_{\Phi \circ \gamma, \Phi(p)}f
 \end{aligned}$$

Den sista versen visar verkan på en funktion som $v_{\Phi \circ \gamma}$ ska göra det i den punkten. Eftersom det gäller för varje punkt gäller det överallt. $\boxtimes$

Se figur 30 för en skiss över situationen.



Figur 30: Skiss över framskjutningen av en hastighet. Den avbildar hastigheten för en kurva, γ , på hastigheten för kurvan $\Phi \circ \gamma$. Punkten $\Phi(p)$ är förkortad till q .

Det finns ett systerbegrepp till framskjutningen också. Låt oss definiera det.

Definition 48 (Tillbakaryckning)

Låt (M, π_{TM}, TM) och (N, π_{TN}, TN) vara två glatta fiberknippen och $\Phi : M \rightarrow N$ en glatt funktion. **Tillbakaryckningen**, Φ^* , av Φ definieras då som

$$\Phi^* : T^*N \rightarrow T^*M$$

så att

$$\omega \mapsto \Phi^*(\omega)$$

Den definieras av sin verkan på vektorer. Säg att $\omega \in T_p^*M$ för någon punkt, $p \in M$, då verkar den på vektorer, $X \in T_pM$ enligt

$$\Phi^*(\omega)(X) = \omega(\Phi_*(X))$$



Denna är liksom dualen till framåtskjutningen. Vi kan börja med att studera den i en karta på samma sätt som för framåtskjutningen, men nu hämtar vi komponenterna med basvektorerna $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ i stället för baskovektorerna dx^μ . Låt oss anta samma situation, alltså låt (U, x) vara en karta ur en atlas, $\mathcal{A}_M$, för M , och (V, y) vara en ur, $\mathcal{A}_N$, för N . Givetvis har vi $p \in U$ och $\Phi(p) \in V$ (annars skulle det vara ganska meningslöst). Vi har att för en kovektor $dy^\alpha \in T_{\Phi(p)}^*N$ så kommer $\Phi^*(dy^\alpha)$ vara en kovektor i T_p^*M . Då kan vi extrahera en komponent enligt

$$\begin{aligned} \Phi_\mu^{*\alpha} &= \Phi^*(dy^\alpha) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \\ &= dy^\alpha \Phi_* \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \\ (331) \quad &= \frac{\partial \hat{\Phi}^\alpha}{\partial x^\mu} \\ &= \Phi_{*\mu}^\alpha \end{aligned}$$

Vilket märkligt resultat. Framåtskjutningen och tillbakalyftningens komponenter är exakt samma. Högst kuriöst. Lägg åter märke till att dimensionen av de olika mångfalderna kan skilja sig så att det finns ingen garanti för att α och μ kommer ur samma indexmängd.

15.3.2 Inducerad metrik

Låt oss laga en snabb liten tillämpning av våra nya favoritavbildningar.

Definition 49 (Inducerad metrik)

Låt (M, π_{TM}, TM) och (N, π_{TN}, TN) vara två glatta fiberknippen och $\Phi : M \rightarrow N$ en injektiv funktion. Om vi känner till en metrik, g , på TN så kan vi skapa en **inducerad metrik**, g_M , på TM . Den definieras i termer av Φ_* så som

$$g_M(X, Y) = g(\Phi_*(X), \Phi_*(Y))$$

för alla $X, Y \in T_p M$.



I termer av en bas kan vi skriva den som komponenter enligt

$$(332) \quad (g_M)_{\mu\nu}(p) = g_{ab}(\Phi(p)) \left(\frac{\partial \hat{\Phi}^a}{\partial x^\mu} \right)_{\phi(p)} \left(\frac{\partial \hat{\Phi}^b}{\partial x^\nu} \right)_{\Phi(p)}$$

Detta kan ekvivalent uttryckas i termer av tillbakaryckningen.

15.3.3 Inbäddningar, nedsänkningar och inlevelser

Nu när vi har definierat framåtskjutningar och tillbakaryckningar är vi i stånd att fundera på hur vi kan avbilda mångfalder på andra mångfalder. Vi är, sen vi var små, vana med att avbilda S^1 eller S^2 i $\mathbb{R}^2$ respektive $\mathbb{R}^3$. Vi har även ibland råkat i problem, så som då vi ska avbilda *Klein-flaskan* i $\mathbb{R}^3$. Det går inte alltid att avbilda utan att tvingas låta mångfalden korsa sig själv. Situationen är inte helt olik den att rita planära grafer på ytor med skilda genera (högt genus gör att grafer kan ritas planärt som inte kan det på ytor med lägre genus). Vi ska nu försöka reda ut vad det betyder att korsa sig själv (betydelsen är inte lika enkel som för grafer) och under vilka förutsättningar man kan göra olika bra avbildningar. I synnerhet är vi intresserade av att avbilda mångfalder på $\mathbb{R}^d$.

Definition 50 (Inlevelse, nedsänkning)

Låt (M, π_{TM}, TM) och (N, π_{TN}, TN) vara två glatta fiberknippen och $\Phi : M \rightarrow N$ en glatt funktion. Då kallas Φ för en **inlevelse** av M i N om

$$(\Phi_*)_p : T_p M \rightarrow T_{\Phi(p)} N$$

är injektiv för alla $p \in M$.

Om vi i stället kräver att $(\Phi_*)_p$ den är surjektiv kallas Φ för en **nedsänkning** av M i N .



Vi ser omedelbart att vi behöver ha $\dim(M) \leq \dim(N)$ för en inlevelse och $\dim(N) \leq \dim(M)$ för en nedsänkning. Låt oss ta ett exempel på en inlevelse.

Exempel

Tag S^1 och avbilda den som symbolen för siffran åtta i $\mathbb{R}^2$. Den avbildningen är inte injektiv (två punkter av S^1 avbildas på punkten i $\mathbb{R}^2$ där åtta skär sig själv), men avbildningen av tangentrummen är injektiv, ty i punkten där de korsar kommer tangentrummen ligga i olika underrum av $\mathbb{R}^2$. Se figur 31 för en skiss över situationen.

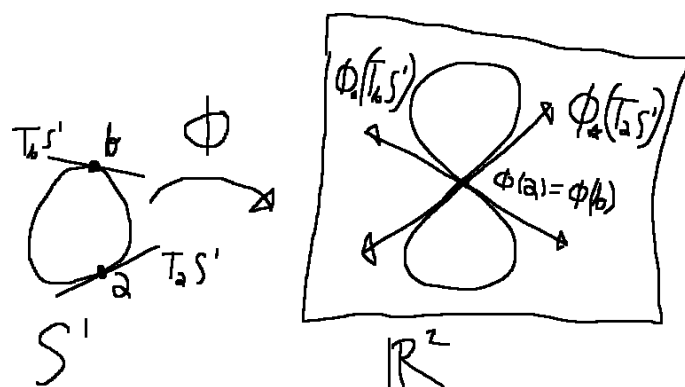


Mot-exempel

Ett exempel på en avbildning som inte är en inlevelse är en där vi tar S^1 och avbildar den på $\mathbb{R}^2$ så att den tangerar sig själv i en punkt. Då kommer inte framåtskjutningen av tangentrummen att vara injektiv eftersom de två tangentrummen i den punkten ligger i samma underrum till $\mathbb{R}^2$. Se figur 32 för en skiss över situationen. ✖

Exempel

Ett annat välkänt exempel är *Klein-flaskan* som kan inlevas i $\mathbb{R}^3$. Den tvingas då korsa sig själv. Den är intressant eftersom den inte är orienterbar, och därför går det inte att definiera integraler över den. Se kapitel 5. ✖



Figur 31: Skiss över en inlevelse. Två punkter, a och b , i S^1 avbildas på samma punkt, $\Phi(a) = \Phi(b)$ i $\mathbb{R}^2$. De tillhörande tangentrummen, $T_a S^1$ och $T_b S^1$, avbildas däremot på olika underrum, $\Phi_*(T_a S^1)$ respektive $\Phi_*(T_b S^1)$ av $\mathbb{R}^d$. Φ är alltså inte injektiv, men Φ_* är det.

De är ju roliga. Vi kan definiera något ännu starkare

Definition 51 (Inbäddning)

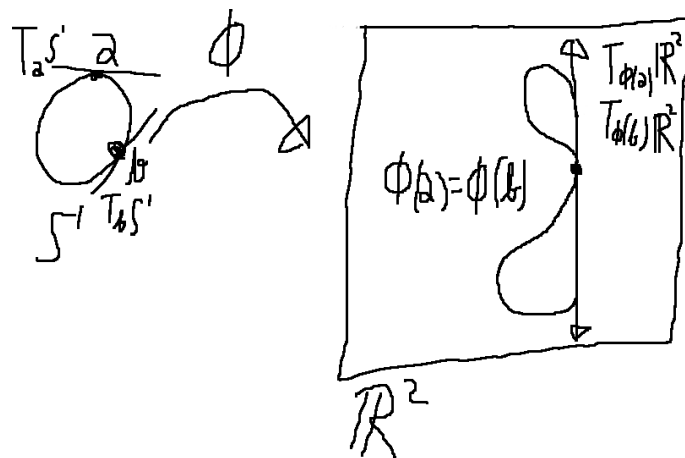
Låt (M, π_{TM}, TM) och (N, π_{TN}, TN) vara två glatta fiberknippen och $\Phi : M \rightarrow N$ en glatt funktion. Då kallas Φ för en **inbäddning** om den är en inlevelse som dessutom uppfyller att $\Phi(M) \subseteq N$ är homeomorf (det finns en bijektion som är kontinuerlig med kontinuerlig invers) med M där vi tar delmängdstopologin för $\Phi(M)$ som ärvs från N . ✖

Anmärkelse. Ibland används termen *topologisk inbäddning* för att beskriva homeomorfier som inte har den glatta strukturen bevarad, alltså kravet att de ska vara inlevelser tas bort. Definitionen ovan kallas i fallen där man vill skilja mellan dem för *glatt inbäddning*.

Inbäddningar är vi vana vid. De gör att vi kan rita mångfalder i sina helheter i $\mathbb{R}^d$ utan att behöva ta till knep. Låt oss tänka på några exemplares.

Exempel

Vi kan enkelt skapa en inbäddning av S^1 i $\mathbb{R}^2$. Vi låter bli att rita den som en



Figur 32: Skiss över en avbildning, Φ som misslyckas med att vara en inlevelse. Problemet är att framåskjutningen av tangentrummen $T_a S^1$ och $T_b S^1$ hamnar på tangentrummen $\Phi_*(T_a S^1) = T_{\Phi(a)} \mathbb{R}^2$ respektive $T_{\Phi(b)} \mathbb{R}^2 = \Phi_*(T_b S^1)$ och dessa två är samma underrum av $\mathbb{R}^2$.

åtta likt ovan. Det var efterblivet gjort. I stället ritas vi den som en cirkel. Då har vi en inbäddning. ✕

Exempel

Vi går upp en dimension i varje rum och ritas S^2 som ytan av en boll i $\mathbb{R}^3$. Det kan ett barn förstå. Det blir en inbäddning. ✕

För att avsluta diskussionen kring inbäddningar, inlevelser och nedsänkningar presenteras ett par satser utan bevis.

Sats 4 (Whitneys)

En glatt mångfald, M , med dimension $\dim(M) = m$ kan

★ bäddas in i $\mathbb{R}^{2m}$

★ livas in i $\mathbb{R}^{2m-1}$

✕

Exempel

Om vi går tillbaka till Klein-flaskan, så är det en tvådimensionell mångfald. Den kan mycket riktigt livas in i $\mathbb{R}^3$, som vi ofta sett men den kan inte bäddas in i $\mathbb{R}^3$. Den kan, däremot, bäddas in i $\mathbb{R}^4$, men det är inte så lätt att skulptera. ✕

Detta är en stark variant av Whitneys sats. Det finns även svagare varianter men också starkare. För skojs skull presenterar vi en starkare med

Sats 5

En glatt mångfald, M , med dimension $\dim(M) = m$ kan livas in $\mathbb{R}^{2m-a(m)}$, där $a(k)$ är antalet ettor i binärexpansionen av $k \in \mathbb{N}$. $\boxtimes$

Detta är en mycket intressant sats. Vi tar ett exempel på då den kan tillämpas.

Exempel

Låt $\dim(M) = 3$ för någon mångfald, M . Då kan vi enligt Whitneys sats liva in den i $\mathbb{R}^{2 \cdot 3 - 1} = \mathbb{R}^5$. Låt oss se vad den starkare satsen säger.

3 kan skrivas binärt som $3_{10} = 11_2$. Antalet ettor är alltså 2. Då får vi alltså att M kan livas in i $\mathbb{R}^{2 \cdot 3 - a(3)} = \mathbb{R}^4$. Inte illa! $\boxtimes$

15.4 Flöden

Vi har sett hur hastigheten av en kurva i en punkt är en vektor. Låt oss nu gå baklänges.

Definition 52 (Integralkurva, fullständigt vektorfält)

Låt X vara ett vektorfält på ett knippe, (M, π, TM) . En kurva, $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ kallas för **integralkurva** om dess hastighet överallt är vektorfältets värde i den punkten. Alltså

$$v_{\gamma \cdot \gamma(\lambda)} = X(\gamma(\lambda))$$

Ett vektorfält kallas för **fullständigt** om alla dess integralkurvor har definitionsmängd $I = \mathbb{R}$. $\boxtimes$

Anmärkelse. Ett ekvivalent sätt att definiera det på är att ett fullständigt vektorfält har ett globalt flöde.

Till det kan vi kasta en sats utan bevis

Sats 6

Ett glatt vektorfält med kompakt stöd är fullständigt. $\boxtimes$

Från detta kan vi skapa en ny struktur

Definition 53 (Flöde)

Ett fullständigt vektorfält, X , på en mångfald, M , skapar en 1-parameter familj av funktioner,

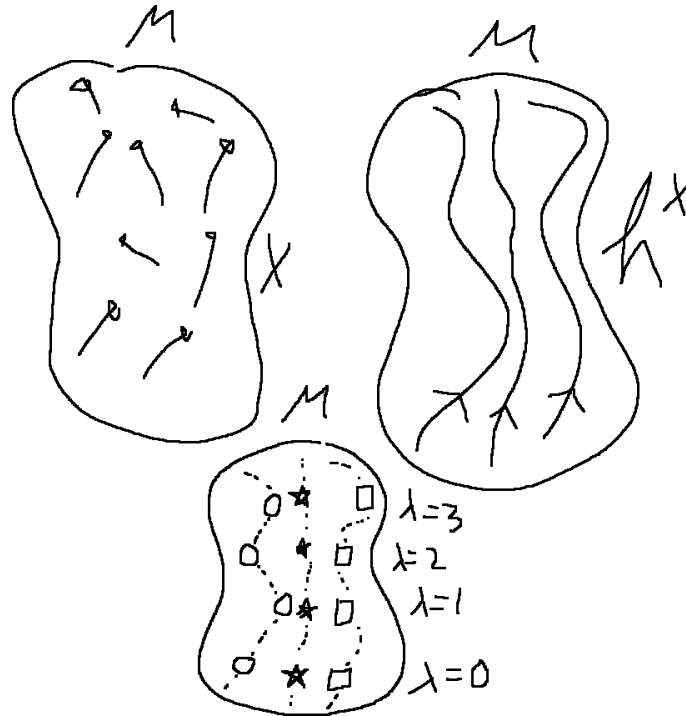
$$h^X : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$$

med

$$(\lambda, p) \mapsto \gamma_p(\lambda)$$

där γ_p är integralkurvan till X med $\gamma(0) = p$. h^X kallas då vektorfältets **flöde**. För ett fixt λ så är funktionen $h_\lambda^X : M \rightarrow M$ en glatt funktion. $\boxtimes$

Flöde är ett beskrivande namn. Efter en viss tid (kurvparameter λ) så har testpartiklarna på M följt med strömmen X och färdats längs dess integralkurvor enligt h^X . Se figur 33 för en skiss över situationen.



Figur 33: Skiss över samma mångfald med olika saker inritade. Först ett vektorfält, där pilar ritats i några punkter. Pilarna är egentligen ett slarvigt sätt att visa riktning eftersom vektorerna lever i tangentrummen snarare än på mångfalden. Sedan är integralkurvorna till vektorfältet inritade. Slutligen är tre testpartiklar (ritade som cirkel, stjärna och fyrkant) placerade på integralkurvorna, och inritade på andra platser som de hamnar på om de följer flödet för de olika parametervärdena.

15.5 Lie-grupper och Lie-algebra

Mängden av vektorfält, $\Gamma(TM)$, kan ses som antingen en modul över ringen av glatta funktioner, $C^\infty(M)$, eller som ett vektorrum över kroppen av reella tal, $\mathbb{R}$. Faktiskt får vi en *Lie-algebra* som är tangentrummet vid identitets-elementet av en *Lie-grupp*. Vi definierar dem, vilket även kräver ett par till definitioner.

Definition 54 (Grupp)

En mängd, G , med en gruppoperation

$$\mu : G \times G \rightarrow G$$

kallas för en **grupp** om gruppoperationen uppfyller

- ★ μ är associativ, så att $\mu(\mu(a, b), c) = \mu(a, \mu(b, c))$ för alla $a, b, c \in G$.
- ★ Det existerar ett identitetslement, $e \in G$, sådant att för varje element, $g \in G$, fås $\mu(e, g) = e = \mu(g, e)$.
- ★ För varje element, $g \in G$, så existerar ett inverselement, g^{-1} , så att $\mu(g, g^{-1}) = e = \mu(g^{-1}, g)$

**Definition 55** (Lie-grupp)

En glatt mångfald, G , som även är en grupp med gruppoperationen

$$\mu : G \times G \rightarrow G$$

kallas för en **Lie-grupp** om denna operation är en glatt avbildning mellan produktmångfalden $G \times G$ och G .

Ett ekvivalent villkor är att avbildningen

$$\nu : G \times G \rightarrow G$$

som definieras enligt

$$\nu(g, h) = \mu(g^{-1}, h)$$

skall vara glatt.

**Definition 56** (Algebra)

Ett vektorrum, A , över någon kropp kallas för **algebra** över kroppen om det finns en bilinjär (sluten och linjär i båda argumenten med avseende på kroppen) operation

$$[\cdot, \cdot] : A \times A \rightarrow A$$



Definition 57 (Lie-algebra)

Tangentrummet, $T_e G$, till en Lie-grupp, G , identitetsselement, $e \in G$, kallas för Lie-gruppens **Lie-algebra**. Den bilinjära operationen uppfyller, förutom såklart att den är bilinjär,

- ★ *Alternande egenskap*, $[x, x] = 0$, för alla $x \in A$, där 0 är den additiva identiteten i A .
- ★ *Jacobi-identiteten*, $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$, för alla $x, y, z \in A$, där 0 är den additiva identiteten i A .



Anmärkelse. Det går att återskapa en Lie-grupp från dess Lie-algebra genom exponentialavbildningen. Om vi betraktar Lie-algebran som tangentrummet så ger den information om de olika riktningarna i Lie-gruppen. Detta kan illustreras i termer av invariants vektorfält, längs vilkas integralkurvor vi kan ta oss från identitetsselementet till vilket gruppelament som helst. Det ligger utanför denna lektionsseries omfång.

På ett ekvivalent sätt kan vi återskapa en Lie-algebra från dess Lie-grupp.

Låt oss expandera $[x + y, x + y]$. Vi får

$$\begin{aligned} (333) \quad [x + y, x + y] &= [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] \\ &= [x, y] + [y, x] \end{aligned}$$

Eftersom den alternerande egenskapen säger att det är *noll* så måste vi ha att

$$(334) \quad [x, y] = -[y, x]$$

Alltså operationen är antikommutativ.

Nu kan vi prova om våra vektorer bildar en Lie-algebra över $\mathbb{R}$. Vi definierar vår bilinjära operation enligt

$$\begin{aligned} (335) \quad [\cdot, \cdot] : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ (X, Y) &\mapsto [X, Y] \end{aligned}$$

som definieras av hur den verkar på en funktion

$$(336) \quad [X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

Är den linjär över $\mathbb{R}$? Ja. Är den alternerande? Ja. Uppfyller den Jacobi-identiteten? Ja.

Innan vi fortsätter inför vi två begrepp

Definition 58 (Lie-delalgebra)

En delmängd, B , av en Lie-algebra, A , kallas för en **Lie-delalgebra** om den är sluten under operationen.

$$[x, y] \in B$$

för alla $x, y \in B$



Anmärkelse. Detta motsvaras av en Lie-delgrupp på Lie-grupp-nivån.

Ett strängare villkor är

Definition 59 (Ideal)

En delmängd, B , av en Lie-algebra, A , kallas för ett **ideal** om den är sluten under operationen där ena argumentet kan komma från A . Vi får tre villkor

$$[x, y] \in B$$

och

$$[y, x] \in B$$

för alla $x \in B$ och $y \in A$.



Anmärkelse. Detta motsvaras av en normal Lie-delgrupp på Lie-grupp-nivån.

Anmärkelse. Detta bör inte förväxlas med den närliggande definitionen av ideal på ringar. I det fallet får man skilja mellan vänster-ideal och höger-ideal.

15.5.0 Strukturkonstanter

Om vi skriver vår operation i någon bas, säg X_j , kan vi uttrycka alla resultat som linjärkombinationer av dessa baselement

$$(337) \quad [X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k$$

där koefficienterna C_{ij}^k kallas för strukturkonstanter. På samma sätt som förbindelsekoefficienterna definierar förbindelsen så definierar dessa konstanter Lie-algebran.

Exempel

Låt oss betrakta rotationer i tre dimensioner. Vi förstår sen vi var små att de inte kommuterar. Rotationsgruppen, $SO(3)$ (ortogonala transformeringar med enhetsdeterminant), representeras av alla möjliga rotationer. Vi har såklart identitets-elementet, R_{id} , som betyder att vi inte snurrar på något. Varje rotation har en invers, alltså vi snurrar åt andra hållet lika mycket.

Om vi betraktar Lie-gruppens Lie-algebra, $\mathfrak{so}(3) = T_{R_{id}}SO(3)$, alltså dess tangentrum vid identiteten, så finner vi att vi kan införa en bas, x^1, x^2, x^3 . Låt nu basvektorerna J_1, J_2, J_3 representera infinitesimala rotationer i dessa riktningar (som man skruvar en skruvmejsel). Då finner vi som bekant (osäker? se vad som händer i en representation av gruppen nära identiteten då vi ignorerar andra ordningen av avståndet från identiteten)

$$(338) \quad [J_i, J_j] = \epsilon_{ij}^k J_k$$

Vi har alltså hittat strukturkonstanterna för $\mathfrak{so}(3)$. De är $C_{ij}^k = \epsilon_{ij}^k$.

Notera att dessa basvektorer genererar $SO(3)$, och vi kan ganska enkelt inse att upprepade appliceringar av dem kommer motvara vilket element som helst i $SO(3)$. På så sätt blir korrespondensen mellan Lie-grupp och Lie-algebra tydlig i detta fall. $\blacklozenge$

15.6 Lie-derivata

Låt oss nu fundera över vad som händer då saker transporteras längs ett flöde.

Definition 60 (Lie-derivata)

Låt X vara ett fullständigt vektorfält med flöde h^X . Då kommer en tensor, T , momentant förändras längs flödet enligt

$$\star \text{ Funktion } f - \mathcal{L}_X f = Xf$$

$$\star \text{ Vektorfält, } Y - \mathcal{L}_X Y = [X, Y]$$

$$\star \text{ Kovektorfält, } \omega - \mathcal{L}_X \omega = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(h_\lambda^X)^* \omega - \omega}{\lambda}$$

Där $\mathcal{L}_X$ kallas för **Lie-derivatan** med avseende på X . Den uppfyller även, för (r, s) och (p, q) -tensorer T respektive S och vektorfält X och Y

$$\star \mathcal{L}_X(T + S) = \mathcal{L}_X T + \mathcal{L}_X S$$

$$\star \mathcal{L}_{X+Y} T = \mathcal{L}_X T + \mathcal{L}_Y T$$

$$\star \mathcal{L}_X(T \otimes S) = \mathcal{L}_X T \otimes S + T \otimes \mathcal{L}_X S$$

Där definitionen av Lie-derivatan av en (r, s) -tensor kan byggas från den sista egenskapen och definitionerna av hur vektorer och kovektorer deriveras. $\star$

Vi undersöker hur detta blir i en karta. Låt oss börja med Lie-derivatan av ett vektorfält Y med avseende på ett annat, X och se vad vi får för komponenter. Vi får

$$(339) \quad (\mathcal{L}_X Y)^\nu = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} Y^\nu - \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} X^\nu \right) Y^\mu$$

Vi fortsätter till $(1, 1)$ -tensor, T

$$(340) \quad (\mathcal{L}_X T)_\rho^\nu = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} T_\rho^\nu - \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\alpha} T_\rho^\alpha + \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\rho} T_\alpha^\nu$$

Ett sista ord om Lie-derivata som ligger långt utanför omfånget men som ändå är för kul för att gå förbi.

Sats 7 (Cartans magiska formel)

För en differentiell form (antisymmetrisk $(0, s)$ -tensor), α , och ett vektorfält X har vi att

$\mathcal{L}_X \alpha = i_X d\alpha + di_X \alpha$ där d är den yttre derivatan och i_X är den insättningsprodukten med x . $\star$

Anmärkelse. Se exempelvis [Hai18] för en ordentlig genomgång.

15.7 Metrisk symmetri och Killing-vektorfält

I kaptiel 14 talade vi om symmetrier utan att vara noggranna med vad vi menade. Här kommer en förklaring.

Definition 61 (Metrisk symmetri)

Om tillbakaryckningen längs ett flöde bevarar metriken så är vektorfältet som genererar flödet en **metrisk symmetri**. För ett vektorfält ξ med flöde h^ξ bevaras metriken, g om

$$(h_\lambda^\xi)^* g = g$$

för alla $\lambda \in \mathbb{R}$

Ekvivalent kan man uttrycka det i termer av framåtskjutningar.

$$g((h_\lambda^\xi)_*A, (h_\lambda^\xi)_*B) = g(A, B)$$

för alla $A, B \in T_pM$ och $\lambda \in \mathbb{R}$.

✂

Vad vi egentligen säger är att avståndet mellan A och B bevaras om vi låter dem skjutas fram längs flödet. På samma sätt kan vi se metriken som oförändrad då den rycks tillbaka längs flödet.

Vi kan se att ξ är en symmetri till g om $\mathcal{L}_\xi g = 0$. Det är ett så viktigt resultat att vi ger det ett namn.

Definition 62 (Killing-vektorfält)

Ett vektorfält, ξ , som med Lie-derivatan verkar på en metrik, g , enligt

$$\mathcal{L}_\xi g = 0$$

kallas för ett **Killing-vektorfält** för metriken.

✂

Inom allmän relativitet är Killing-vektorfält enormt viktiga eftersom de visar på symmetrier för metriken. Utan nog med symmetrier blir fältekvationerna alldeles för svårlösta.

Ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att ξ ska vara ett Killing-vektorfält för g är att det uppfyller *Killings ekvation*

$$(341) \quad \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0$$

där ∇ induceras av metriken.

Ett annat viktigt resultat finner vi i följande sats

Sats 8

Låt ξ^μ vara ett Killing-vektorfält och låt γ vara en geodet med hastighet $\dot{\gamma}^\mu$. Då är $\xi_\mu \dot{\gamma}^\mu$ konstant längs γ .

✂

Vi bevisar den omedelbart.

Bevis

Vi har

$$(342) \quad \begin{aligned} \nabla_{\dot{\gamma}^\nu \partial_\nu} (\xi_\mu \dot{\gamma}^\mu) &= \dot{\gamma}^\nu \nabla_\nu (\xi_\mu \dot{\gamma}^\mu) \\ &= \dot{\gamma}^\nu \dot{\gamma}^\mu \nabla_\nu \xi_\mu + \xi_\mu \dot{\gamma}^\nu \nabla_\nu \dot{\gamma}^\mu \\ &= \dot{\gamma}^\nu \dot{\gamma}^\mu \nabla_\nu \xi_\mu + \xi_\mu \nabla_{\dot{\gamma}^\nu \partial_\nu} \dot{\gamma}^\mu \\ &= 0 \end{aligned}$$

Den sista likheten kommer av att första termen försvinner från Killings ekvation, 341, och den andra termen försvinner tack vare den geodetiska ekvationen, 23. $\boxtimes$

Vi avslutar diskussionen om symmetrier genom att fundera över hur många som kan finnas.

Sats 9

Det maximala antalet $\mathbb{R}$ -linjärt oberoende Killing-vektorfält som får plats i en d -dimensionell mångfald är

$$\frac{d(d+1)}{2}$$

vilket är lika många som antalet oberoende komponenter i en d -dimensionell metrik (symmetri ger att $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$). $\boxtimes$

Ja men låt oss bevisa den typ. För att beviset skall bli litet kompakt försöker vi att slå fast några saker i förväg som förberedelse.

Från Killings ekvation 341 har vi att den kovarianta derivatan av ett Killing-vektorfält, $\nabla_\mu \xi_\nu$, är antisymmetrisk.

För en torsionsfri förbindelse kan vi se att Riemann-Christoffel-tensorn mäter hur mycket kovarianta derivatan av ett vektorfält misslyckas med att kommutera (se ekvation 20). Vi har alltså

$$(343) \quad \nabla_\mu \nabla_\rho \xi_\sigma - \nabla_\rho \nabla_\mu \xi_\sigma = -B^\lambda_{\sigma\rho\mu} \xi_\lambda$$

Nu använder vi cykliska summan för Riemann-Christoffel-symbolen, se ekvation 21,

$$(344) \quad B^\lambda_{\sigma\rho\mu} + B^\lambda_{\rho\mu\sigma} + B^\lambda_{\mu\sigma\rho} = 0$$

Vi använder detta med våra Killing-vektorfält ovan och får (addition av tre permutationer av ekvation 343)

$$(345) \quad \nabla_\mu \nabla_\rho \xi_\sigma - \nabla_\rho \nabla_\mu \xi_\sigma + \nabla_\rho \nabla_\sigma \xi_\mu - \nabla_\sigma \nabla_\rho \xi_\mu + \nabla_\sigma \nabla_\mu \xi_\rho - \nabla_\mu \nabla_\sigma \xi_\rho = 0$$

Använd antisymmetrin av kovarianta derivatan, ekvation 341, och så får vi bort några termer

$$(346) \quad \nabla_\mu \nabla_\rho \xi_\sigma - \nabla_\rho \nabla_\mu \xi_\sigma - \nabla_\sigma \nabla_\rho \xi_\mu = 0$$

Detta innebär att vi kan byta ut differensen i ekvation 343 med bara en term, $\nabla_\sigma \nabla_\rho \xi_\mu = \nabla_\mu \nabla_\rho \xi_\sigma - \nabla_\rho \nabla_\mu \xi_\sigma$, så vi får

$$(347) \quad \nabla_\sigma \nabla_\rho \xi_\mu = -B^\lambda_{\sigma\rho\mu} \xi_\lambda$$

Vi har alltså fått Killing-vektorfälten uttryckta som ordinära linjära differentialekvationer, där vi med initialvillkoren för någon punkt, säg x_0 , alltså $\xi_\mu(x_0)$ och $\nabla_\nu \xi_\mu(x_0)$, kan integrera fram hela Killing-vektorfälten. Nu är vi förberedda nog.

Bevis

Givet $\xi_\mu(x_0)$ och $\nabla_\nu \xi_\mu(x_0)$, för någon koordinatpunkt, x_0 , så kan vi få högre ordningens derivator genom att derivera ekvation 347. Detta kan ske till godtyckligt hög ordning och resultatet i x_0 blir alltid linjärkombinationer av $\xi_\mu(x_0)$ och $\nabla_\nu \xi_\mu(x_0)$.

Då kan vi uttrycka $\xi_\mu(x)$ som en Taylor-utveckling[†] runt x_0 , och då får man också en linjärkombination av $\xi_\mu(x_0)$ och $\nabla_\nu \xi_\mu(x_0)$. Vi skriver det på formen (här använder vi (n) för att hålla i sär olika fält, det är inte ett index som alla andra)

$$\xi_\rho^{(n)}(x) = A^\lambda_\rho(x; x_0) \xi_\lambda^{(n)}(x_0) + B^{\lambda\nu}_\rho(x, x_0) \nabla_\nu \xi_\lambda^{(n)}(x_0)$$

Koefficienterna, A och B beror av metriken och av x_0 , men de beror inte av initialvillkoren, $\xi_\mu(x_0)$ och $\nabla_\nu \xi_\mu(x_0)$, och är således gemensamma för alla Killing-vektorfält. Om några Killing-vektorfält är $\mathbb{R}$ -linjärt oberoende får de inte tillfredsställa (utom triviella fallet)

$$\sum_n c_{(n)} \xi_\rho^{(n)}(x) = 0$$

För konstanter, $c_{(n)}$. Om vi nu betraktar vårt uttryck för $\xi_\rho^{(n)}(x_0)$ i d dimensioner så ser vi att det finns d sådana oberoende. Vi har därtill $\frac{d(d-1)}{2}$ oberoende $\nabla_\nu \xi_\rho(x_0)$, där vi minns från ekvation 341 att antisymmetrin drar ned antalet oberoende från d^2 . Summan av oberoende initialvillkor, som alltså ger $\mathbb{R}$ -linjärt oberoende vektorfält, är alltså $\frac{d(d+1)}{2}$. $\boxtimes$

[†]Om det är obekant så rekommenderas valfri bok i matematisk analys, jag skulle ta Rudin kanske. Ahlfors är rätt bra med, då får man komplex på köpet.

A Notation och konventioner

Notationen ämnar följa etablerade konventioner inom teoretisk fysik. Dessa kan te sig märkliga för en turist men de är genomtänkta och praktiska.

A.0 Linjär algebra

Element ur vektorrum eller moduler betecknas inte på något särskilt sätt utan det är upp till läsaren att av sammanhanget förstå vad för slags objekt vi sysslar med. Man hade kunnat använda fet-stil eller sätta en pil över dem men så gör vi inte och det är det vanliga.

Givet en bas så betecknas basvektorerna med ett index i nedre positionen. Komponenterna som hör till basvektorerna för att genom en linjärkombination beskriva godtyckliga vektorer betecknas med index i övre position. För en vektor, v med bas e skrivs vektorn alltså i basen som

$$(348) \quad v = v^j e_j$$

där v^j är element ur kroppen (ringen) och e_j är basvektorer i vektorrummet (baselement i modulen).

Notera även att Einsteins konvention gäller, så att upprepade indices implicit summeras över. Det medför att $\sum$ försvinner från många uttryck

$$(349) \quad \sum_j a^j b_j \rightarrow a^j b_j$$

För kovektorer gäller samma princip fast med det omvända, alltså en kovektor, ω , skrivs i en bas, ϵ , som

$$(350) \quad \omega = \omega_j \epsilon^j$$

Där basvektorerna alltså har sina indices uppe och komponenterna har sina där nere.

För en (r, s) -tensor gäller att dess komponenter har r indices uppe och s indices nere, och att dessa åtföljs av en tensorprodukt av r faktorer av basvektorer med indices nere och s faktorer av dualbasvektorer med indices uppe.

Som bas för dualrummet väljs alltid dualbasen, så att $e_j \epsilon^k = \delta_j^k$.

Tack vare dualbasen behöver vi aldrig skriva ut basvektorer eller baskovektorer vid en inre produkt eftersom den inre produkten blir densamma som produkten

av komponenterna. Ibland refererar vi därför till komponenterna av en tensor som tensorn själv fast detta är slarvigt. Typiskt förekommer uttryck så som "en vektor, A^μ " eller "en $(0, 2)$ -tensor, $S_{\mu\nu}$ " där en bas är underförstådd och vi behandlar komponenterna som representationen för tensorn.

Om inget missförstånd kan ske skrivs ibland kontraktionen av en tensor med sig själv som en tensor med samma symbol. En (r, s) -tensor kan alltså dras samman till en $(r - 1, s - 1)$ -tensor. Om missförstånd kan ske används ej samma symbol, exempelvis har $B^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ flera kontraktioner. Då vi ur den definierar Ricci-tensorn, $R_{\beta\delta} = B^\alpha_{\beta\alpha\delta}$ används därför en annan symbol. Ricci-tensorn har däremot bara en möjlig kontraktion som är Ricci-skalären, $R = g^{\beta\delta} R_{\beta\delta} = R^\beta_\beta$, och därför används samma symbol, R , för båda.

Om samma symbol förekommer med indices på andra platser så innebär det att den musikaliska isomorfin använts.

Exempel

Låt A^μ vara en vektor. Om A_μ förekommer i samma sammanhang så åsyftas

$$(351) \quad A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$$

✂

Exempel

Låt $T_{\mu\nu}$ vara en $(0, 2)$ -tensor. Om T^μ_ν förekommer i samma sammanhang så åsyftas

$$(352) \quad T^\mu_\nu = T_{\alpha\nu} g^{\alpha\mu}$$

Där $g^{\alpha\mu}$ är komponenter av invers-metriken, g^{-1} . Denna notationsegenhet är viktig att minnas eftersom den används så gott som i all litteratur. Utan den skulle notationen bli mycket kladdigare. ✂

A.0.0 Indices

Indices från grekiska alfabetet löper mellan 0 och 3. Indices från latinska alfabetet löper mellan 1 och 3.

A.1 Derivator

För derivata med avseende på någon variabel, säg λ , används $\frac{d}{d\lambda}$. För partialderivata används på motsvarande sätt, för koordinaten x^μ , $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Detta förkortas ofta till ∂_μ om basen är underförstådd.

Om inget missförstånd kan ske betecknas derivata ibland med $\dot{f}$. Upprepad derivering ger då $\ddot{f}$. Detta används typiskt då funktioner bara beror av en

variabel (exempelvis en kurva som beror av en parameter, en radiell koordinat som bara beror av tiden eller universums expansion, a) eller då det framgår av sammanhanget med avseende på vilken variabel som deriveringen sker. Denna notation används enbart för att spara plats.

På samma sätt används notationen f' för att referera till $\dot{f}$, även här med samma antaganden att det framgår av sammanhanget med avseende på vilken variabel deriveringen sker. Denna notation används mycket sparsamt i dessa lektioner.

En vanlig notation för derivator är att beteckna $\frac{\partial S}{\partial x^\nu}$ som $S_{,\nu}$. Upprepad derivering ger då att $\frac{\partial^2 S}{\partial x^\nu \partial x^\sigma}$ betecknas som $S_{,\nu\sigma}$. Ordningen spelar ingen roll för glatta funktioner (men man får se upp annars). Denna notation används inte i dessa lektioner.

Kovariant derivata betecknas med $\nabla_X Y$ där den kovarianta derivatan av Y med avseende på X åsyftas. Typiskt är det med avseende på en koordinatinducerad basvektor, ∂_μ och då förkortas det som ∇_μ .

En motsvarande notation för kovariant derivata är $\nabla_\nu S \rightarrow S_{;\nu}$. Ibland förekommer även $S_{;\nu}$. Dessa kommuterar inte som partialderivator, så ordningen spelar roll här. Den skrivs som $\nabla_\alpha(\nabla_\beta S) = S_{;\beta;\alpha}$ eller $S_{;\beta\alpha}$. Denna notation används inte heller i dessa lektioner.

A.2 Fältteori

Typiskt betecknar vi lagrangiandensiteten med $\mathcal{L}$, snarare än $\mathcal{L}$, och kallar den för lagrangianen, vilket är slarvigt men typiskt då vi sysslar med fältteorier.

A.3 Metrik och båglängd

Metrikens signatur är den så kallade *mest minus*. Den är den näst intill uteslutande konventionen inom kvantfältteori och även den vanligaste inom relativitetsteori. En Lorentz-signatur skrivs alltså med ett positivt tecken och resten negativa. Mer specifikt för vår 4-dimensionella metrik $(+, -, -, -)$.

Då vi beskriver olika metriker, i synnerhet för svarta hål används växelvis uttrycken *metrik*, g , och *båglängd*, ds^2 . Vi menar samma sak. Typiskt är dock att inte skriva ut tensorprodukterna då man talar om båglängd (egentligen bara slarvig notation), men det är viktigt att minnas att de verkligen är där i metriken. Vi skulle alltså exempelvis kunna skriva

$$(353) \quad \begin{aligned} g &= a \cdot dt \otimes dt - b \cdot dx \otimes dy - b \cdot dy \otimes dx - c \cdot dx \otimes dx \\ ds^2 &= a \cdot dt^2 - 2b \cdot dx dy - c \cdot dx^2 \end{aligned}$$

och mena exakt samma sak med båda verserna.

A.4 Kurvor

Kurvor, i detta sammanhang, är kontinuerliga (oftast rentav glatta) avbildningar från $\mathbb{R}$ till en mångfald, M . Ibland är definitionsmängden hela $\mathbb{R}$, och ibland något intervall, $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$. Argumentet till en kurva kallas för kurvparametern.

En omparametrisering av en kurva är giltig om den är strikt monoton funktion, ϕ , så att $\lambda \mapsto \phi(\lambda)$. För våra sammanhang är vi intresserade av självparallella kurvor. Den egenskapen bevaras inte vid så allmänna omparametriseringar utan i stället begränsar vi oss till affina transformer på formen $\lambda \mapsto \kappa \cdot \lambda + \lambda_0$, med $\kappa > 0$ och λ_0 konstanter.

Kurvans hastighet betecknas med v_γ , och i en punkt, $p = \gamma(\tau)$ som $v_{\gamma, \gamma(\tau)} = v_{\gamma, p}$. $v_\gamma \in \Gamma(TM)$, $v_{\gamma, \gamma(\tau)} \in T_p M$.

B Vidare läsning

För den som önskar vidareutbilda sig i ämnet föreslås följande.

B.0 Bakomliggande matematik

Den bästa introduktionen till multilinjär algebra och många av differentialgeometris koncept fås i [Hai18]. Där läggs särskild vikt vid antisymmetriska tensorer.

För differentialgeometri i allmänhet har ingen skrivit någon bra bok. Ett standardverk är [Lee09] som gott och väl täcker den grundläggande teorin. För en god introduktion till de relevanta delarna rekommenderas Fredric P. Schullers kurser i allmän relativitet [Sch15a] och i den teoretiska fysikens geometriska anatomi [Sch15b]. Båda kurserna finns inspelade på video.

För fördjupning inom Lie-algebra rekommenderas den kompakta men mycket användbara [Cah06] och det välskrivna standarverket [Jac79].

B.1 Teorin i allmänhet

En mycket välskriven och kortfattad sammanfattning av teorin fås i [Dir75]. Standardverk är [Wei72] och [Mis73]. De är mycket tunga och täcker in enormt mycket. En ytterligare bok med obegripligt stor täckning är [Bla24], som i synnerhet behandlar de fältteoretiska aspekterna och variationsanalysen i enastående detalj.

B.2 Rumtiden

En kompakt och välskriven bok som handlar om rumtidens struktur är [Sch50]. Den är mycket matematiskt tillfredsställande, i synnerhet i hur den behandlar förbindelser utan metrik.

B.3 Tillämpningar

För beskrivningar av svarta hål rekommenderas [Car97]. En bok som behandlar svarta hål, gravitationella vågor, kosmologi och flera andra tillämpningar mycket väl är [Rin01].

B.4 Avancerad fördjupning

Standardverket för avancerad teori är [Wal84]. Denna går inte igenom teorins grunder så väl utan fokuserar på fördjupning. Särskilt fint behandlar den symmetrier och går även in på spinorer och kvantfältteori i krökt rumtid. Ett problem med den är att den har några små egenheter angående konventioner (metrisk signatur, definition av Riemann-Christoffel-symbolen och annat).

Referenser

- [A23] *A. Panache Martius*. Samizdat, 2023.
- [Sch50] Erwin Schrödinger. *Space time structure*. Cambridge University Press, 1950.
- [Pes95] Schröder Peskin. *An Introduction to Quantum Field Theory*. CRC Press, 1995.
- [Lee09] Jeffrey Lee. *Manifolds and Differential Geometry*. American Mathematical Society, 2009.
- [Hai18] Guillemin & Haine. *Differential Forms*. Självpublicerat utkast, 2018.
- [Gel94] Zelevinsky Gelfand Kapranov. *Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants*. Springer Verlag, 1994.
- [Dir75] Paul Adrien Maurice Dirac. *General Theory of Relativity*. John Wiley & sons, 1975.
- [Wal84] Robert Wald. *General relativity*. University of Chicago Press, 1984.
- [Bla24] Matthias Blau. *Lecture Notes on General Relativity*. Självpublicerat på internet via Albert Einstein Center for Fundamental Physics, Institut für Theoretische Physik, Universität Bern, 2024.
- [Car97] Sean Carroll. *Lecture Notes on General Relativity*. Självpublicerat på arXiv, 1997.
- [Mis73] Wheeler Misner Thorne. *Gravitation*. Princeton University Press, 1973.
- [Wei72] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology*. John Wiley & sons, 1972.
- [Rin01] Wolfgang Rindler. *Relativity - Special, General and Cosmological*. Oxford University Press, 2001.
- [Sch15a] Fredric Schuller. *General Relativity*. Video lectures. WE-Heraeus International Winter School on Gravity och Light, 2015.
- [Sch15b] Fredric Schuller. *The Geometrical Anatomy of Theoretical Physics*. Video lectures. Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg, 2015.
- [Cah06] Robert Cahn. *Semi-simple Lie Algebras and Their Representations*. Dover Publications, 2006.
- [Jac79] Nathan Jacobson. *Lie Algebras*. Dover Publications, 1979.