Presentation: Härledning av Levi-Civita-förbindelsen

Ifrån antagande om ekvivalens mellan raka och stationära kurvor

Anders

31 oktober 2022 (18:46)

Mål

Det slutgiltiga målet är att skriva *förbindelsekoefficienterna*, $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, i termer av *partiella derivator*, ∂_μ av *metriken*, $g_{\mu\nu}$.

Mer specifikt vill vi i slutändan komma till likheten

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(g^{-1})^{\lambda\alpha}[\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\alpha\nu} - \partial_\nu g_{\mu\alpha}] \tag{0}$$

Förbindelsen som definieras av de koefficienterna kallas *Levi-Civita-förbindelsen*.

Inbjudan till differentialgeometri

Publiken antas vara ok på matte i allmänhet.

Vi rör oss på en glatt mångfald med en metrik och en förbindelse. Vad vi har är alltså:

- ⋆ En mängd som vi kallar *mångfald*, M, vars element vi kallar *punkter*.
- ⋆ En *toplogi*, $\mathscr{O}$.
- ⋆ En glatt *atlas*, $\mathscr{A}$ (glatt definierat så som att alla övergångsfunktioner mellan kartor är glatta).
- ⋆ En *metrik* $g : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$.
- ⋆ En *förbindelse*, $\nabla : T_pM \times \bigotimes_{\mu=0}^{\Lambda\in\mathbb{N}} T_pM \to \bigotimes_{\mu=0}^{\Lambda\in\mathbb{N}} T_pM$.

Notera punktvis definition av metrik och förbindelse (och hur förbindelsen naturligt kan utvidgas).

Riemannska geometrins fundamentalsats

Slarvig formulering:

Det finns för varje metrisk mångfald exakt en unik förbindelse, Levi-Civita-förbindelsen, som uppfyller de två villkoren

$\nabla g = 0$, *Metrisk kompatibilitet*

och

$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$, *Torsionsfrihet*

Riemannska geometrins fundamentalsats

Levi-Civita-förbindelsen uppvisar en viktig egenskap, nämligen ekvivalens mellan stationära kurvor och raka kurvor.

En kurvas krökning bestäms av förbindelsen.

En kurvas längd bestäms av metriken.

Levi-Civita-förbindelsen bestämmer alltså en relation mellan förbindelsen och metriken.

Raka kurvor

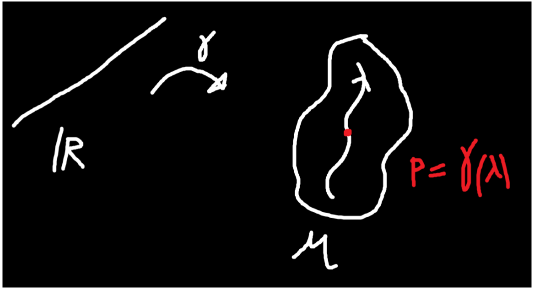
En kurva

$$\gamma : \mathbb{R} \to M \tag{1}$$

som löper med någon parameter längs en mångfald, M, kallas för *rak* om den uppfyller villkoret (den *geodetiska ekvationen*)

$$\nabla_{v_\gamma} v_\gamma = 0 \tag{2}$$

Raka kurvor



Figur: Någon söt kurva, γ, som avbildar någon reell parameter på mångfalden.

Raka kurvor

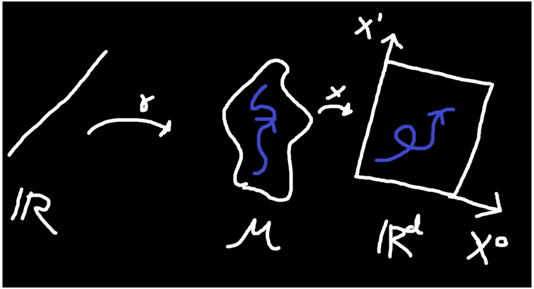
Med andra ord så ska kurvans hastighet deriverat med avseende på kurvans hastighet vara noll. Nu unför vi en karta,

$$x : M \to \mathbb{R}^d \tag{3}$$

där d är mångfaldens dimension. Vi inför beteckningen

$$\gamma^\mu = (x \circ \gamma)^\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d \tag{4}$$

Raka kurvor



Figur: γ i koordinater enligt kartan x.

Raka kurvor

Med denna notation kan vi skriva hastighetens komponenter som

$$(x \circ v_\gamma)^\mu = \frac{d}{d\lambda}(x \circ \gamma(\lambda))^\mu \tag{5}$$

$$= \dot{\gamma}^\mu \tag{6}$$

Raka kurvor

Vi undersöker nu hur en geodet ser ut i vår karta:

$$
\begin{align}
\nabla_{\dot\gamma^\mu \partial_\mu}(\dot\gamma^\nu \partial_\nu) &= \dot\gamma^\mu \nabla_\mu(\dot\gamma^\nu \partial_\nu) \tag{7}\\
&= \dot\gamma^\mu(\partial_\mu \dot\gamma^\nu)\partial_\nu + \dot\gamma^\mu \dot\gamma^\nu \nabla_\mu \partial_\mu \tag{8}\\
&= \ddot\gamma^\rho \partial_\rho + \dot\gamma^\mu \dot\gamma^\nu \Gamma^\rho_{\mu\nu} \partial_\rho \tag{9}\\
&= 0 \tag{10}
\end{align}
$$

Så för komponenterna gäller $\ddot\gamma^\rho + \dot\gamma^\mu \dot\gamma^\nu \Gamma^\rho_{\mu\nu} = 0$.

Stationära kurvor

En kurva, γ, är *stationär*, om den uppfyller villkoret

$$\delta S = 0 \tag{11}$$

Där S är kurvans längd.

Stationära kurvor

$$S = \int d\lambda \sqrt{g(v_\gamma, v_\gamma)} \tag{12}$$

där λ är kurvparametern. Om inget annat anges så syftar punkten på $x \circ \gamma(\lambda)$. Då kan vi skriva kurvlängden i komponenter

$$S = \int d\lambda \sqrt{g_{\mu\nu}\dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu} \tag{13}$$

Härledning av Levi-Civita-förbindelsen

Nu när grunden är lagd kan vi gå vidare och koncentrera oss på uppgiften. Vad vi önskar är att härleda Levi-Civita-förbindelsen från två antaganden:

Torsionsfrihet <- Nej jag tror denna följer för jag antar det aldrig någonstans? Ja så är det!

Ekvivalens mellan stationära kurvor och raka kurvor.

Strategin blir att variera en rak kurva och visa att förbvindelsekoefficienterna ges av metrikens partialderivator.

Låter inte särskilt svårt.

Härledning av Levi-Civita-förbindelsen

Vi börjar med att variera en rak kurva som är parametriserad på intervallet $[0, 1]$.

$$\gamma^\mu \to \gamma^\mu + \varepsilon\varphi^\mu \tag{14}$$

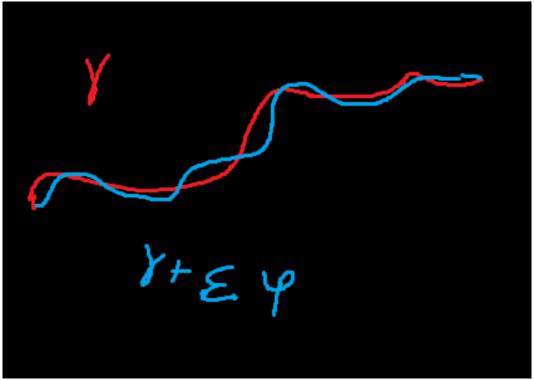
Där ε är någon liten, positiv, parameter och $\varphi^\mu(0) = \varphi^\mu(1) = 0$, ändpunkterna är alltså fästa. Vi får på samma sätt en variation i hastigheterna

$$\dot{\gamma}^\mu \to \dot{\gamma}^\mu + \varepsilon\dot{\varphi}^\mu \tag{15}$$

Och i metriken

$$g_{\mu\nu}(\gamma^\mu) \to g_{\mu_\nu}(\gamma^\mu + \varepsilon\varphi^\mu) \tag{16}$$

Härledning av Levi-Civita-förbindelsen



Figur: Kurva och variation av kurva. Notera att ändpunkter är fästa.

Härledning av Levi-Civita-förbindelsen

Låt oss sätta in detta i vårt uttryck för kurvlängden

$$S = \int_0^1 d\lambda \sqrt{g_{\mu_\nu}(\gamma^\alpha + \varepsilon\varphi^\alpha)(\dot{\gamma}^\mu + \varepsilon\dot{\varphi}^\mu)(\dot{\gamma}^\nu + \varepsilon\dot{\varphi}^\nu)} \tag{17}$$

Vi utvecklar metriken i första ordningen, $g_{\mu_\nu}(\gamma^\alpha + \varepsilon\varphi^\alpha) \to g_{\mu\nu} + \varepsilon\varphi^\alpha\partial_\alpha g_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, och kastar så småningom övriga termer med motiveringen att endast termer linjära i ε kommer överleva att derivera med avseende på ε och sen låta ε gå mot 0.

Härledning av Levi-Civita-förbindelsen

Vi samlar alltså termer som är linjära i ε

$$S = \int_0^1 d\lambda \sqrt{\varepsilon[g_{\mu\nu}\dot{\varphi}^\mu\dot{\gamma}^\nu + g_{\mu\nu}\dot{\gamma}^\mu\dot{\varphi}^\nu + \varphi^\alpha\dot{\gamma}^\mu\dot{\gamma}^\nu\partial_\alpha g_{\mu\nu} + \mathscr{O}(\varepsilon^2)]} \tag{18}$$

Derivering med avseende på ε och låta $\varepsilon \to 0$, innebär att vi får en kvot i integranden enligt

$$\delta S = \int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{\gamma}^\mu\dot{\gamma}^\nu}}[g_{\mu\nu}\dot{\varphi}^\mu\dot{\gamma}^\nu + g_{\mu\nu}\dot{\gamma}^\mu\dot{\varphi}^\nu + \varphi^\alpha\dot{\gamma}^\mu\dot{\gamma}^\nu\partial_\alpha g_{\mu\nu}] \tag{19}$$

Härledning av Levi-Civita-förbindelsen

Den här ser jobbig ut

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{\gamma}^{\mu}\dot{\gamma}^{\nu}}} \tag{20}$$

men vi kan baka in den i parametriseringen av kurvorna. Vi gör det utan att ändra vår notation. Vi kallar fortfarande parametern för λ och $\lambda \in [0, 1]$.

Härledning av Levi-Civita-förbindelsen

Detta förenklar vår likhet en smula. Vi har alltså vårt villkor:

$$\delta S = \int_0^1 d\lambda [g_{\mu\nu}\dot{\varphi}^\mu \dot{\gamma}^\nu + g_{\mu\nu}\dot{\gamma}^\mu \dot{\varphi}^\nu + \varphi^\alpha \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu \partial_\alpha g_{\mu\nu}] \tag{21}$$

Ett problem här är termerna som innehåller variationskurvan, φ och dess hastighet, $\dot{\varphi}$. Utan dem hade vi haft ett villkor på integranden i stället för integralen.

Vår strategi blir att faktorisera ut dem med hjälp av att ändra $\dot{\varphi} \to \varphi$ med partiell integration.

Härledning av Levi-Civita-förbindelsen

$$\int_0^1 d\lambda g_{\mu\nu}\dot{\varphi}^\mu\dot{\gamma}^\nu \tag{22}$$

$$= [(g_{\mu\nu}\dot{\gamma}^\nu)\varphi^\mu]_0^1 - \int_0^1 d\lambda \frac{d}{d\lambda}(g_{\mu\nu}\dot{\gamma}^\nu)\varphi^\mu \tag{23}$$

Där vi inser att första termen i sista högerledet är noll på grund av randvillkoren på φ. Derivatan med avseende på λ räknas ut enligt

$$\frac{d}{d\lambda}(g_{\mu\nu}\dot{\gamma}^\nu) = \dot{\gamma}^\kappa\dot{\gamma}^\nu\partial_\kappa g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\ddot{\gamma}^\nu \tag{24}$$

Härledning av Levi-Civita-förbindelsen

Vi sätter in detta i vår kurvlängd och får integranden

$$\varphi^\alpha \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \dot{\gamma}^\kappa \dot{\gamma}^\nu \varphi^\mu \partial_\kappa g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \ddot{\gamma}^\nu \varphi^\mu - \dot{\gamma}^\kappa \dot{\gamma}^\mu \varphi^\nu \partial_\kappa g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \ddot{\gamma}^\mu \varphi^\nu \tag{25}$$

Genom att byta namn på indices som summeras över (kan ju inte göra skada) så kan vi skriva om till

[i första termen ändrar vi inga indices, i andra termen kör vi först $\mu \to \alpha$ sen $\kappa \to \mu$, i tredje kör vi $\nu \to \lambda$ och $\mu \to \alpha$, i fjärde kör vi $\nu \to \alpha$ och $\kappa \to \nu$ och i den femte kör vi slutligen $\mu \to \lambda$ och $\nu \to \alpha$]

$$\varphi^\alpha \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\mu \varphi^\alpha \partial_\mu g_{\alpha\nu} - \dot{\gamma}^\nu \dot{\gamma}^\mu \varphi^\alpha \partial_\nu g_{\mu\alpha} - 2 g_{\alpha\lambda} \ddot{\gamma}^\lambda \varphi^\alpha \tag{26}$$

Härledning av Levi-Civita-förbindelsen

Nu dividerar vi allt med $\dot{\gamma}^\nu \dot{\gamma}^\mu \varphi^\alpha$ och får

(27) $$\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\alpha\nu} - \partial_\nu g_{\mu\alpha} - 2 g_{\alpha\lambda} \frac{\ddot{\gamma}^\lambda}{\dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu}$$

Vi noterar att vi inte längre är beroende av variationen. Om integranden är 0 så måste kurvan vara stationär.

Härledning av Levi-Civita-förbindelsen

Här utnyttjar vi den geodetiska ekvationen

$$\ddot{\gamma}^{\rho} + \dot{\gamma}^{\mu}\dot{\gamma}^{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = 0 \tag{28}$$

$$\Longleftrightarrow \tag{29}$$

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = -\frac{\ddot{\gamma}^{\rho}}{\dot{\gamma}^{\mu}\dot{\gamma}^{\nu}} \tag{30}$$

Insatt i vårt uttryck har vi alltså

$$\partial_{\alpha} g_{\mu\nu} - \partial_{\mu} g_{\alpha\nu} - \partial_{\nu} g_{\mu\alpha} + 2g_{\alpha\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \tag{31}$$

Härledning av Levi-Civita-förbindelsen

För att detta ska vara 0 överallt så har vi alltså villkoret

$$-2g_{\alpha\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \partial_{\alpha}g_{\mu\nu} - \partial_{\mu}g_{\alpha\nu} - \partial_{\nu}g_{\mu\alpha} \tag{32}$$

Vilket ger vårt sökta uttryck för Levi-Civita-förbindelsens *förbindelsekoefficienter*

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(g^{-1})^{\lambda\alpha}[\partial_{\alpha}g_{\mu\nu} - \partial_{\mu}g_{\alpha\nu} - \partial_{\nu}g_{\mu\alpha}] \tag{33}$$

Härledning av Levi-Civita-förbindelsen

Tack för att ni pallade lyssna!

Bonus

Mål till EOY

- ⋆ 110 kg bänk
- ⋆ 65 kg press
- ⋆ Spräcka skjortärmen

Bonus bonus

Fem grejer jag är tacksam över

- ⋆ Att ni existerar
- ⋆ Att ni vill vara mina vänner
- ⋆ Att ni vill komma på besök
- ⋆ Att vi kan ha en så trevlig stund
- ⋆ Att vi kan göra detta igen någon gång