Fråga om grafer

Anders

8 maj 2023

Sammanfattning

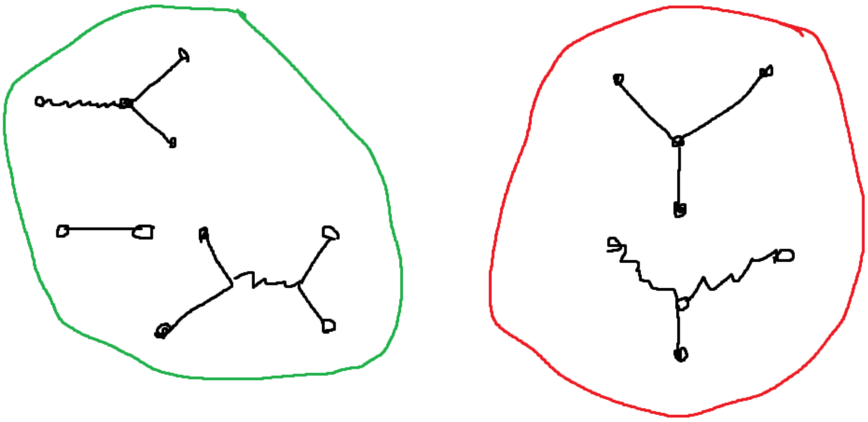
Häri frågas om grafer.

Vänner som mig kära är,
Söta, fina, underbara,
Säg mig huru många här
Utav dessa grafer vara!

Ett ting vet jag, det är att
Det finns en och sen finns inga
(Enligt regler som vi satt)
Grafer som har blott en slinga

Men hur många är det som
Utav slingor hava många
Fler än man kan rita dem
Raderna de blir för långa

Innehåll



Figur 0: Exempel på giltiga och ogiltiga grafer.

0 Allmänt om dessa grafer

Jag kan inget om grafer.

Det sagt, låtom oss nu föreställa oss grafer med följande regler:

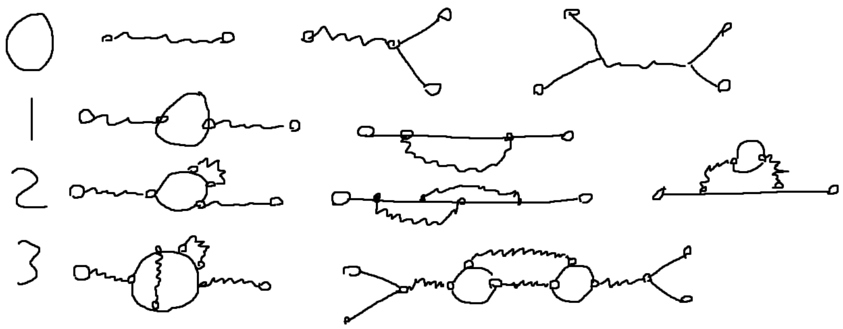
0. Det finns två typer av kanter
    a) f-kant, som vi ritar som streck
    b) γ-kant, som vi ritar vågigt
1. Varje nod måste ha kanter enligt exakt ett av följande tre fall:
    a) En f-kant
    b) En γ-kant
    c) En γ-kant och två f-kanter
2. Självslingor (*buckle* på engelska) är förbjudna

Utan att ni vet om det har jag nu introducerat er till något som kallas för kvantelektrodynamik men det behöver vi inte gå in på närmare.

0.0 Slingor

Det finns säkert något mer trendigt namn för det här inom grafteori men om sånt kan jag inget. Vi kommer därför att använda termer som är typiska inom naturfilosofin.

Definition 0.0.0 (Slinga)
*En graf säges ha en **slinga** om det existerar två punkter sådana att det finns två distinkta stigar (inga gemensamma kanter) mellan dem.*



Figur 1: Exempel på slingor.

En graf utan slinga kallas för ***träd****.*

Definition 0.0.1 (Slingtal)
Ett träd har ***slingtal*** *0.*

För en graf med slinga fås ***slingtalet*** *genom att räkna hur många gånger man kan ta bort en kant ur ovan nämnda stigar tills man är kvar med ett träd. Antalet gånger är* ***slingtalet****.*

0.1 Irreducibla grafer

Definition 0.1.0 (Naken propagator)
En graf kallas för en ***naken propagator***[†] *om den bara består av en kant (alltså två noder förbundna med en kant). Det finns bara två sådana grafer i vår teori.*

Definition 0.1.1 (1PI)
En graf kallas för ***1PI*** *om det inte går att, genom att skära av en kant, dela grafen i två grafer sådana att ingen av dem är en naken propagator.*

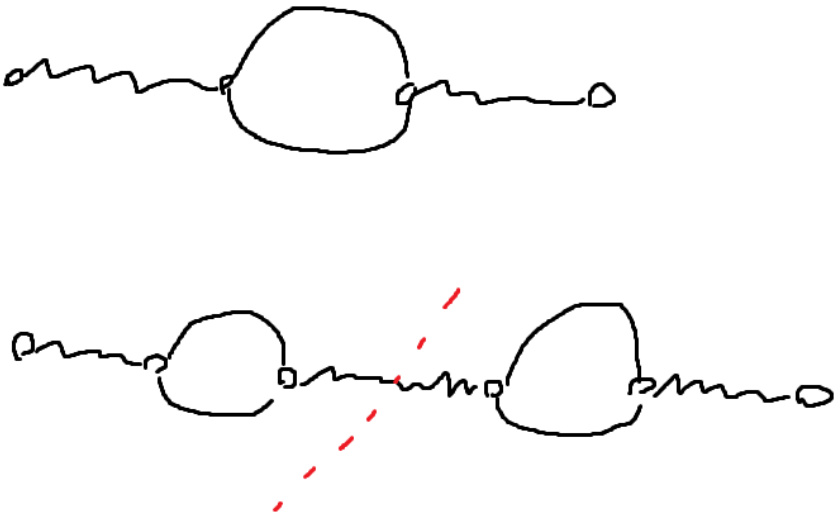
Nu är vi redo för att formulera våra problemata.

1 Problemata

För att förenkla terminologin kallar vi noder som är anslutna till exakt en γ-kant för γ-noder. På samma sätt kallar vi noder som är anslutna till exakt en f-kant för f-noder. Vi kallar resterande noder för inre noder.

Två frågor har jag funderat på länge (många år fast jag är inte så smart så det går långsamt):

[†]Jag ber om ursäkt för namnet, en påklädd propagator förekommer så småningom i teorin.



Figur 2: Exempel på 1pI och icke 1pI.

0. Hur många 1pI-grafer som har exakt två γ-kanter och inga f-kanter existerar för varje slingtal?
1. Hur många 1pI-grafer som har exakt två f-kanter och inga γ-kanter existerar för varje slingtal?

2 Mina egna tankar

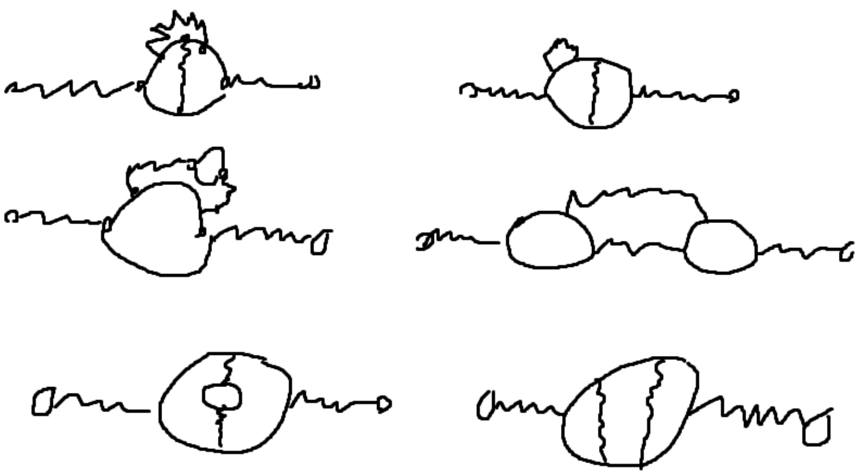
För träd är det enkelt. Svaret är 1 i båda fallen eftersom en inre nod tvingar oss att göra en slinga för att kunna sammankoppla två f-noder eller två γ-noder.

För en slinga har vi även där bara ett sätt att skapa dem.

För två blir det intressant. Där kan vi börja göra roliga saker.

Jag skulle verkligen bli lycklig† om ni kan hitta nån regel till det här och ni får gärna visa att det växer fakultetiskt eller nåt sånt för det skulle underlätta för mig.

†Nej det är en lögn jag skulle vara lika ensam och olycklig oavsett.



Figur 3: Exempel på några 1pI för grafer med två γ-noder. Förmodligen finns det fler men just nu orkar jag inte tänka ut några.